# CONSTRUÇÃO DE UMA BOLA DE FUTEBOL: aplicação na confeitaria e contextualização para o ensino

## Construction of a soccer ball: application in confectionery and contextualization for education

Luiz Carlos Pitzer[1]
Albio Fabian Melchioretto[1]

**Resumo**: O presente artigo surge diante da necessidade de uma professora de confeitaria em preencher um bolo no formato de uma bola com os pentágonos e hexágonos. Esta bola já possuía um volume, que, devido ao molde do bolo, bastava preencher toda a sua superfície com pentágonos e hexágonos, que seriam moldados a partir de pasta americana e fixados no bolo. Por questões metodológicas, decidiu-se, que neste caso, a bola terá 12 faces pentagonais e 20 hexagonais. Esta forma se baseia em um dos sólidos de Arquimedes, que recebe o nome de icosaedro truncado. A partir dos dados citados, foi calculada a área da esfera, descobrindo posteriormente a medida do lado de cada polígono, que são iguais em ambos os polígonos. Sabendo a medida do lado, foram construídos com régua e compasso os moldes de papel para servirem de modelo e auxiliador para a confeiteira.

Palavras-chave: Bolo. Bola. Arquimedes. Aprender.

**Abstract**: This article comes before the need for a confectionery teacher to fill a cake in the shape of a ball with pentagons and hexagons. This ball already had a volume, this due to the cake mold, then was enough to fill the entire surface with pentagons and hexagons, where they would be molded from fondant and fixed on the cake. For methodological reasons it was decided that in this case, the ball 12 will pentagonal surfaces and 20 hexagonal. This form is based on one of the Archimedean solids that receives the name of truncated icosahedron. From the aforementioned data, the area of the sphere is calculated, then finding the measure side of each polygon, that these in turn are the same in both polygons. Knowing the far side, they were constructed with ruler and compass paper molds to serve as a model and helper for the baker.

Keywords: Cake. Ball. Arquimedes. Learn.

### Introdução

Este artigo tem por finalidade apresentar a aplicação de conceitos matemáticos para calcular o tamanho dos gomos que constituem uma bola de futebol, em especial a formada por pentágonos e hexágonos. Esse desenvolvimento envolve o conhecimento de trigonometria, cálculo de área, desenho com compasso e régua.

O problema reside na necessidade de preencher um bolo esférico com os polígonos e eles devem se encaixar perfeitamente e completar o bolo sem que sobrassem espaços. Para dar conta do problema, nota-se que o tamanho deles não pode ser qualquer um, na verdade há uma única possibilidade para dar certo. Todo este desafio traz consigo uma gama de conhecimentos históricos e matemáticos.

A constituição do artigo se divide em: um relato dos sólidos de Arquimedes e sua constituição; desenvolvimento do problema proposto; metodologia utilizada para a resolução; construção geométrica do pentágono e hexágono e outras considerações observadas para a resolução do problema, bem como o bolo já produzido.

[1] Centro Universitário Leonardo Da Vinci – UNIASSELVI. Rodovia BR 470, Km 71, no 1.040, Bairro Benedito. Caixa Postal 191. CEP 89130-000 – Indaial/SC. Fone (47) 3281-9000 – Fax (47) 3281-9090. Site: www.uniasselvi.com.br

**Poliedros de Arquimedes**

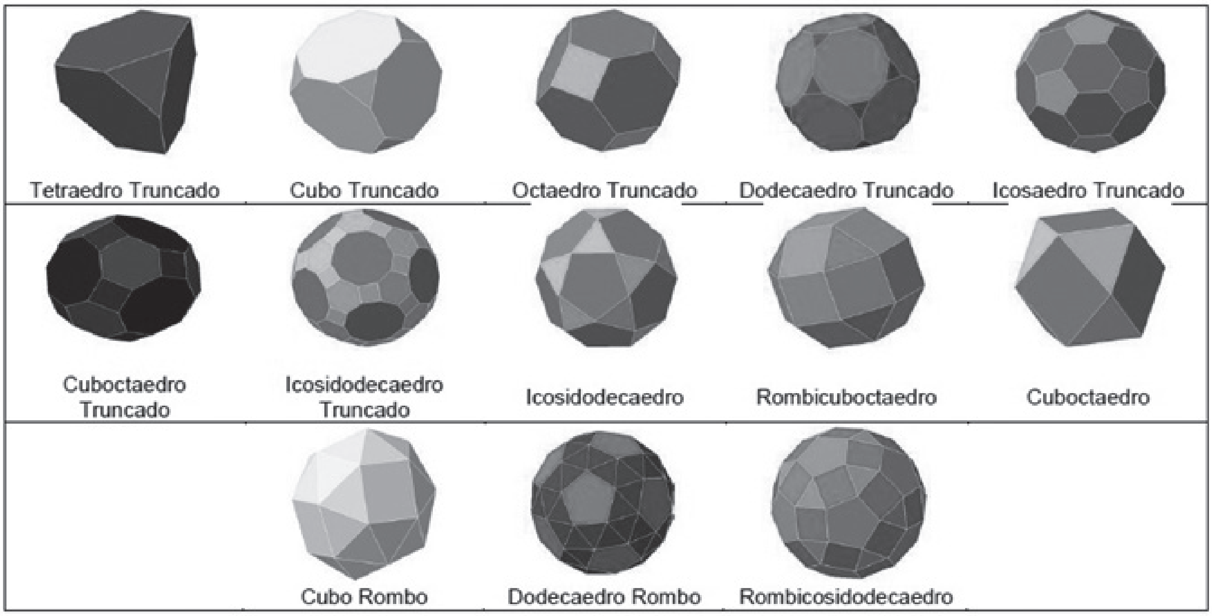
A família dos poliedros foi descrita pelo matemático Arquimedes[2] e redescoberta pelo matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630), que compreendeu todos os poliedros uniformes convexos de faces regulares, que totalizam treze sólidos diferentes.

Na definição da GESTAR - Programa de Gestão Escolar (Brasil, 2008, p. 98), "[...] são poliedros nos quais toda face é um polígono regular, embora nem todas faces sejam do mesmo tipo. Todo vértice, contudo, é congruente a qualquer outro vértice, isto é, em torno de cada vértice, as faces que aparecem são as mesmas e apresentam-se na mesma ordem". Com relação à construção deles,

> [...] os treze Poliedros Arquimedianos podem ser construídos a partir dos Platônicos, sendo onze deles por meio de truncaturas (cortes) nas arestas destes primeiros, e o Cubo Rombo e o Dodecaedro Rombo, por meio de snubificação de Poliedros Platônicos, cujo processo consiste em afastar todas as faces de um Poliedro Platônico (ENEM, p. 2).

O icosaedro truncado, mais conhecido na forma de bola de futebol, faz parte de um dos treze poliedros de Arquimedes. Na figura a seguir é possível observar todos eles:

**Figura 1**. Os treze Poliedros Arquimedianos




Fonte: ENEM (2013, p. 3)

Para um melhor entendimento da constituição de cada sólido arquimediano, o quadro a seguir esclarece cada um deles com a quantidade de faces e polígonos. A nomeação de cada um deles é atribuída a Kepler.

---

[2]Arquimedes de Siracusa, nascido em 287 a. C., é lembrado pela sua contribuição na física, matemática, filosofia e engenharia.

**Quadro 1**. Descrição dos sólidos arquimedianos

| | Números de | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sólidos** | **Faces** | **Triângulos** | **Quadrados** | **Pentágonos** | **Hexágonos** | **Octógonos** | **Decágonos** |
| Tetraedro truncado | 8 | 4 | | | 4 | | |
| Cuboctaedro | 14 | 8 | 6 | | | | |
| Octaedro truncado | 14 | | 6 | | 8 | | |
| Cubo truncado | 14 | 8 | | | | 6 | |
| Rombicuboctaedro | 26 | | | | | | |
| Cuboctaedro truncado | 26 | | 12 | | 8 | 6 | |
| Icosidodecaedro | 32 | 20 | | 12 | | | |
| Icosaedro truncado | 32 | | | 12 | 20 | | |
| Dodecaedro truncado | 32 | 20 | | | | | 12 |
| Cubo achatado | 38 | 32 | 6 | | | | |
| Rombicosidodecaedro | 62 | 20 | 30 | 12 | | | |
| Icosidodecaedro truncado | 62 | | 30 | | 20 | | 12 |
| Dodecaedro achatado | 92 | 80 | | 12 | | | |

Fonte: Almeida (2010, p. 84)

### Problematização e resolução

Antes de explicar a problemática matemática, contextualiza-se a maneira inesperada de como este problema surgira. Uma professora do curso de panificação e confeitaria apresentou um problema. Ela não estava conseguindo preencher um bolo no formato de uma bola de futebol. A bola de futebol é construída com pentágonos e hexágonos. Para poder responder ao questionamento de como preencher o bolo, sugeriu-se a ela que fosse realizada uma pesquisa.

Como já afirmado, pensar uma bola é pensar hexágonos e pentágonos. Segundo Albino (2011, p. 39), "[...] na copa mundial de 1970 o mundo do futebol começou a utilizar uma bola confeccionada com pentágonos e hexágonos. Esta estrutura poliédrica chama-se icosaedro truncado, e é constituída de 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais".

Para resolver o problema, calcula-se a área total da esfera (bola), podendo igualar isso a 12 áreas de pentágono e mais 20 áreas de hexágonos.

$$\text{Área da esfera } A = 4\pi r^2$$

$$\text{iqual a}$$

$$20 \text{ vezes a Área do hexágono } A = \frac{3}{2} \cdot l^2\sqrt{3}$$

$$\text{mais}$$

$$12 \text{ vezes a Área do pentágono } A = \frac{5}{2} \cdot l \cdot \text{apótema}$$

Os lados do hexágono e do pentágono são iguais em todos os pontos da esfera, podendo-se utilizar isso para calcular quanto deve medir um dos lados. Sabendo um deles, saber-se-ão então todos. O diâmetro da forma do bolo é de 28 centímetros, calcula-se com isso a área da esfera (bola):

$$A = 4\pi r^2$$

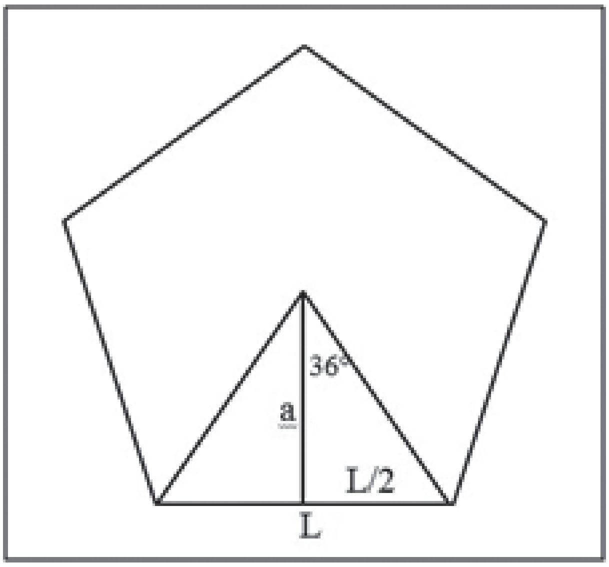
$$A = 4 \cdot \pi \cdot 14^2$$

$$A = 2463{,}01\ cm^2$$

Antes de equacionar e resolver, foi visto um pequeno problema na fórmula da área do pentágono, a incógnita apótema. Ela deverá estar relacionada ao lado do pentágono para que seja possível posteriormente resolver.

Um dos cinco triângulos isósceles que constituem o pentágono está sendo representado na figura a seguir com algumas marcações: um ângulo de 72° divididos pela mediatriz, o lado "L" e a apótema "a" como podemos ver na figura:

**Figura 2**. Pentágono




Fonte: Os autores

Com a utilização da trigonometria neste caso tangente, deixamos o apótema relacionado com o lado do pentágono:

$$tg\ 36° = \frac{\frac{l}{2}}{a}$$

$$a = \frac{l}{2 \cdot tg\ 36°}$$

Substituindo o apótema na fórmula para cálculo da área do pentágono, temos o seguinte:

$$A = \frac{5}{2} \cdot l \cdot apótema$$

$$A = \frac{5}{2} \cdot l \cdot \frac{l}{2 \cdot tg\ 36°}$$

$$A = \frac{5}{4} \cdot \frac{l^2}{tg\ 36°}$$

$$A = \frac{5}{4} \cdot l^2 \cdot \cot\ 36°$$

Com esta transformação, posso juntar tudo na ideia de:

$$Área\ da\ esfera\ = 20 \cdot Área\ do\ hexágono + 12 \cdot Área\ do\ pentâgono$$

$$2463{,}01\ = 20 \cdot \frac{3}{2} \cdot l^2\sqrt{3} + 12 \cdot \frac{5}{4} \cdot l^2 \cdot \cot\ 36°$$

$$2463{,}01\ = 30\sqrt{3} \cdot l^2 + 15 \cot 36° \cdot l^2$$

$$2463{,}01\ = 72{,}6 \cdot l^2$$

$$l \cong 5{,}82\ cm$$

Sabe-se que os lados devem medir 5,8 centímetros. Coube, então, outra tarefa, construir os pentágonos e os hexágonos para servir de referência no molde das peças. Tentamos construí-los a partir de alguns programas de computador, mas depois de tanto tentar e fracassar, preferi fazer os polígonos à moda antiga, com régua e compasso.

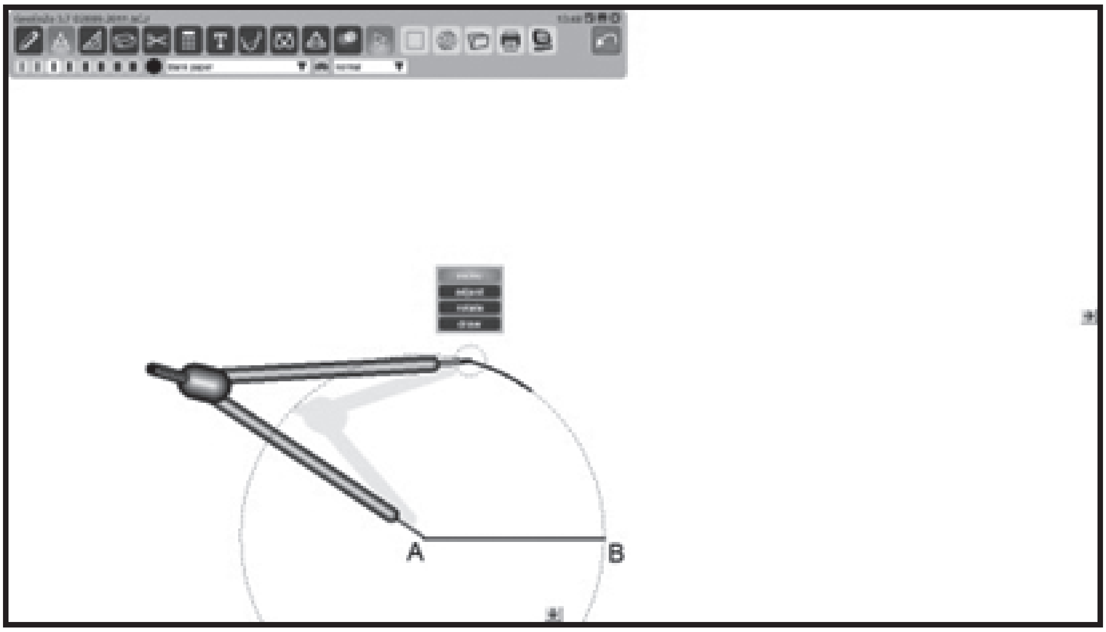
**Construções de figuras geométricas**

Para a construção dos polígonos, necessitamos de papel A4, régua, compasso e lápis. Para as imagens que apareceram a seguir, utilizei um programa chamado GeoEnZo, encontrado gratuitamente para download no site: <http://geoenzo.com>. O GeoEnZo é uma ferramenta de desenho geométrico e técnico projetado para quadros, ele não requer instalação e é intuitivo quanto ao uso. Na sequência, vejamos a construção das figuras.

## Hexágono

Será apontada a construção do hexágono em seis momentos. No primeiro momento, deve-se traçar um segmento de reta AB que representa o tamanho do lado. No nosso caso de 5,8 centímetros e com o compasso aberto em 5,8 centímetros, trace um arco a partir de A:

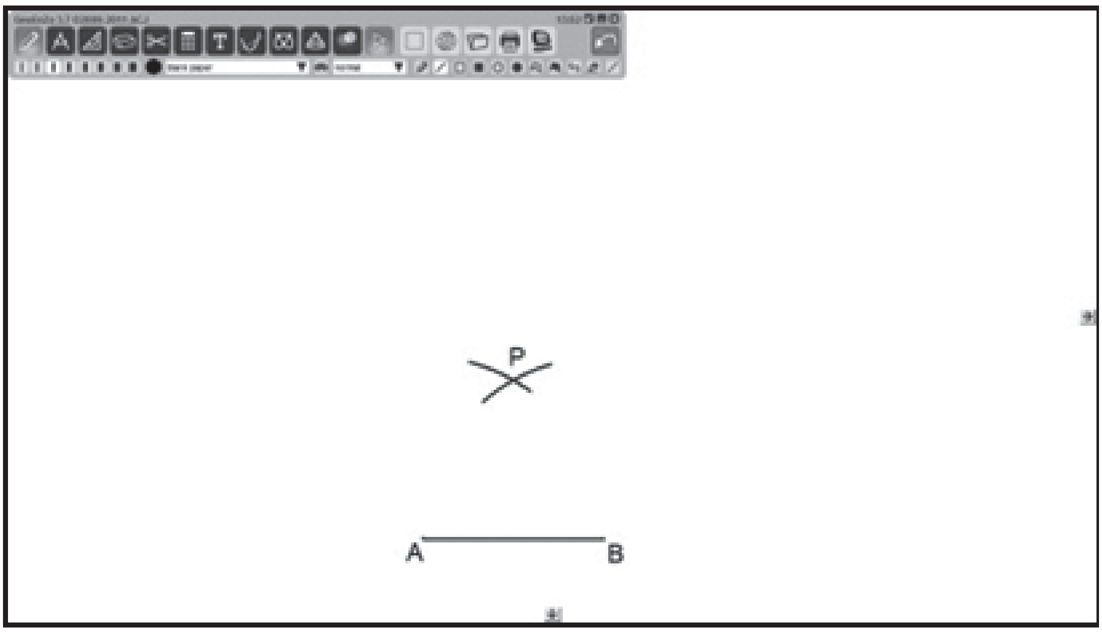
**Figura 3**. Desenho no Geoenzo Hexágono




Fonte: Os autores

No segundo momento, com a mesma medida do compasso, posicione em B e faça outro arco. Note que a intersecção dos dois arcos formam o ponto P.

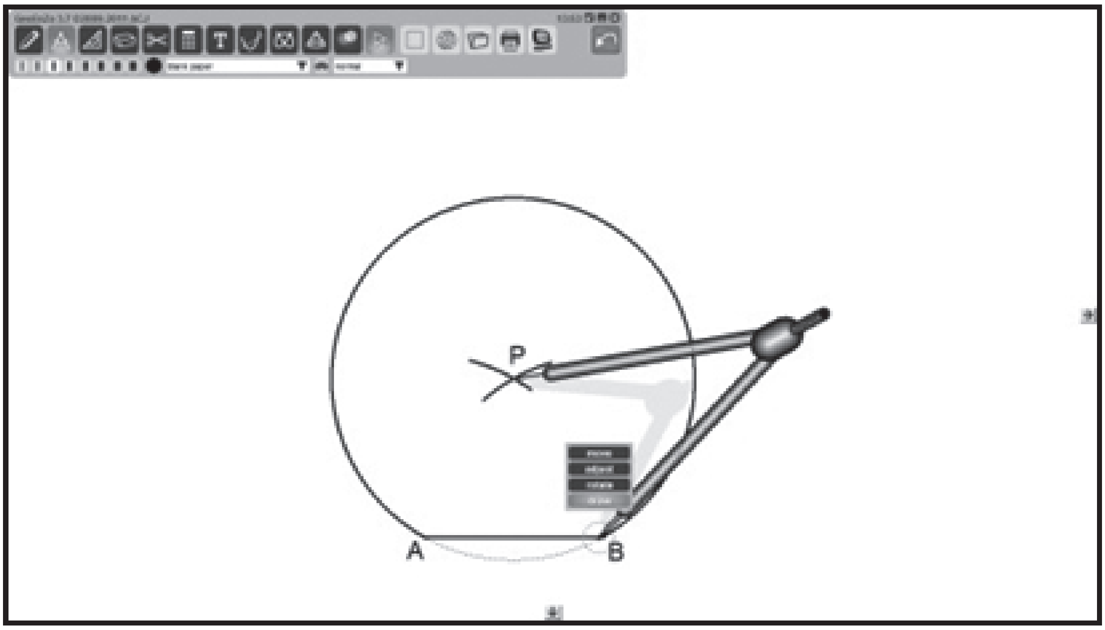
**Figura 4**. Desenho no Geoenzo Hexágono




Fonte: Os autores

Com o compasso ainda aberto em 5,8 cm, posicionado no ponto P, trace o arco de A até B. Este é o terceiro momento.

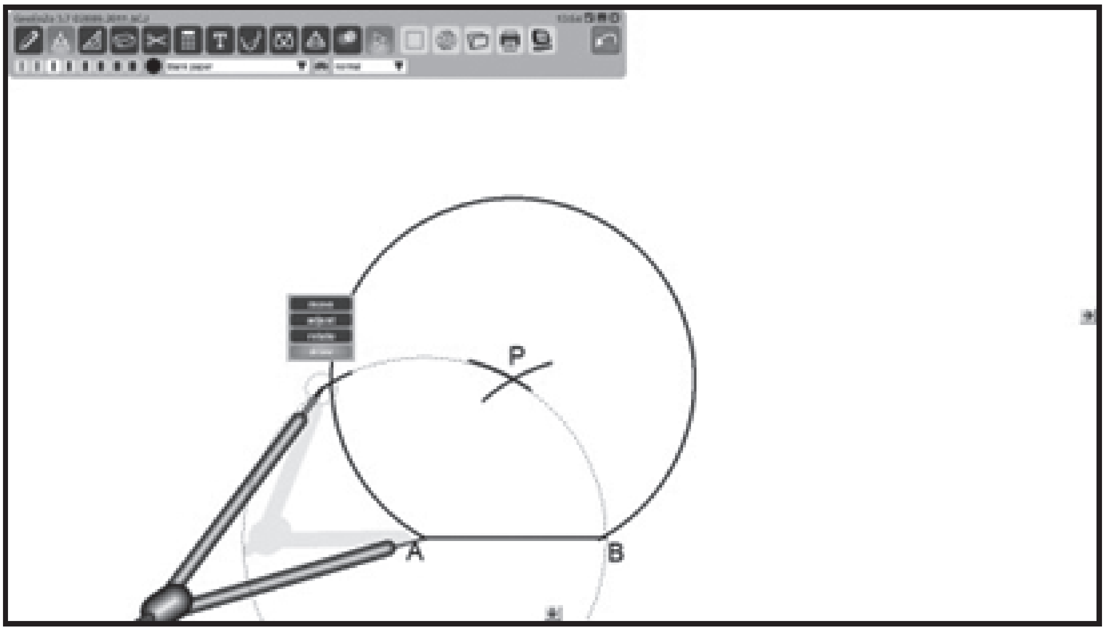
**Figura 5**. Desenho no Geoenzo Hexágono




Fonte: Os autores

Sem modificar ainda a medida do compasso, marca-se, a partir de A ou B, o arco anteriormente feito.

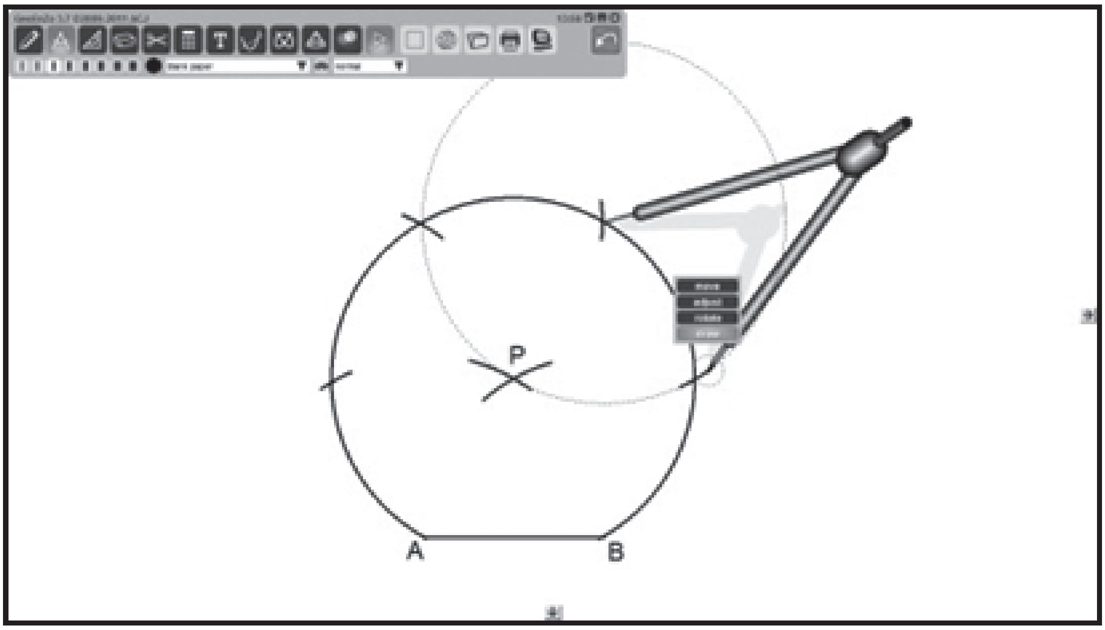
**Figura 6**. Desenho no Geoenzo Hexágono




Fonte: Os autores

Basta agora fazer as demais a partir da já feita, de modo que todo arco fique todo marcado.

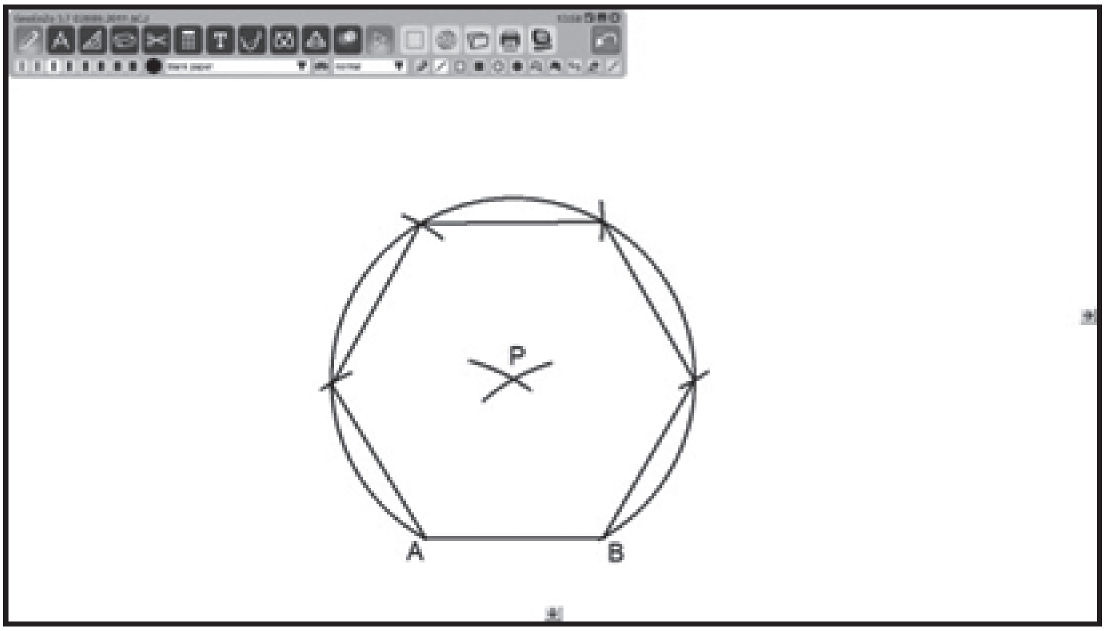
**Figura 7**. Desenho no Geoenzo Hexágono




Fonte: Os autores

Para finalizar a figura, ligo com uma reta todos os pontos marcados e teremos o hexágono regular.

**Figura 8**. Desenho no Geoenzo Hexágono

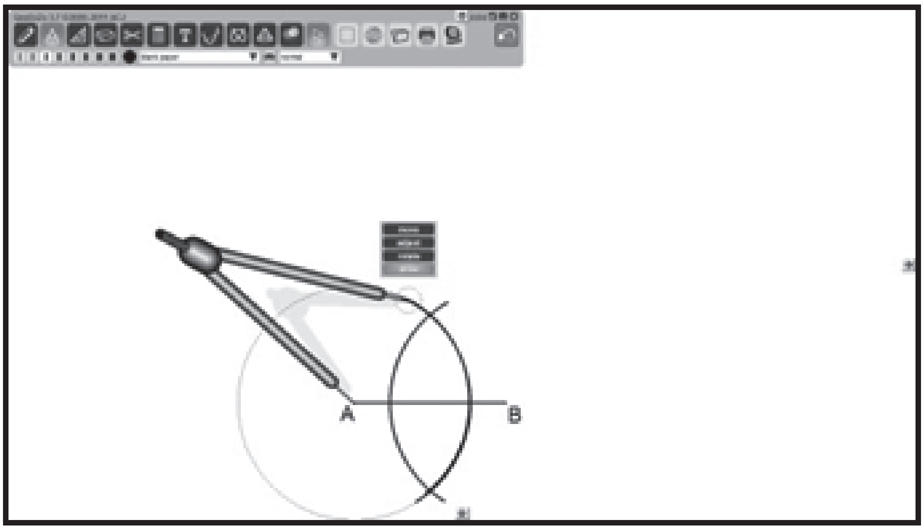



Fonte: Os autores

## Pentágono

A formação do pentágono dar-se-á em oito momentos. Para iniciar, traço uma reta AB de tamanho 5,8 centímetros correspondente à medida do lado do pentágono. Na sequência, com o compasso aberto, menor que 5 centímetros, traço dois arcos, um a partir de A e outro a partir de B.

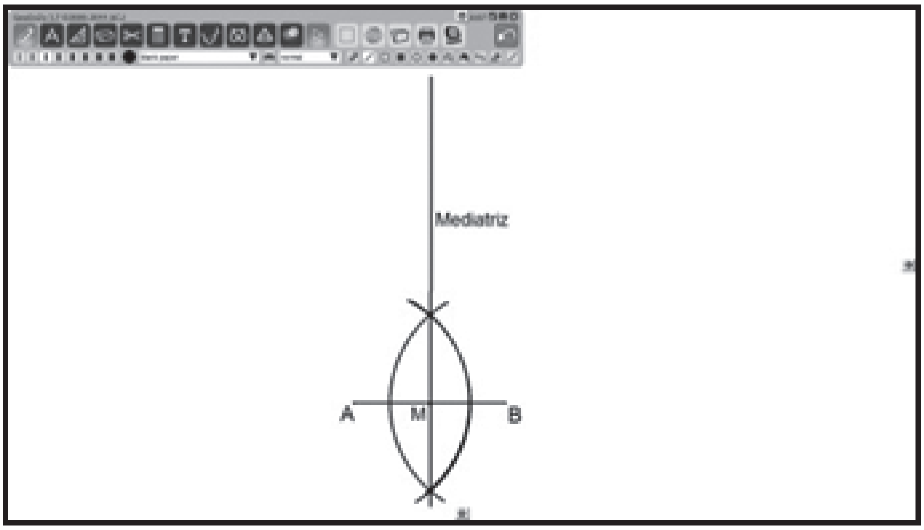
**Figura 9**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Na sequência, traço uma reta que une as intersecções dos arcos. Com este procedimento, consegue-se encontrar a mediana M e a mediatriz do segmento AB.

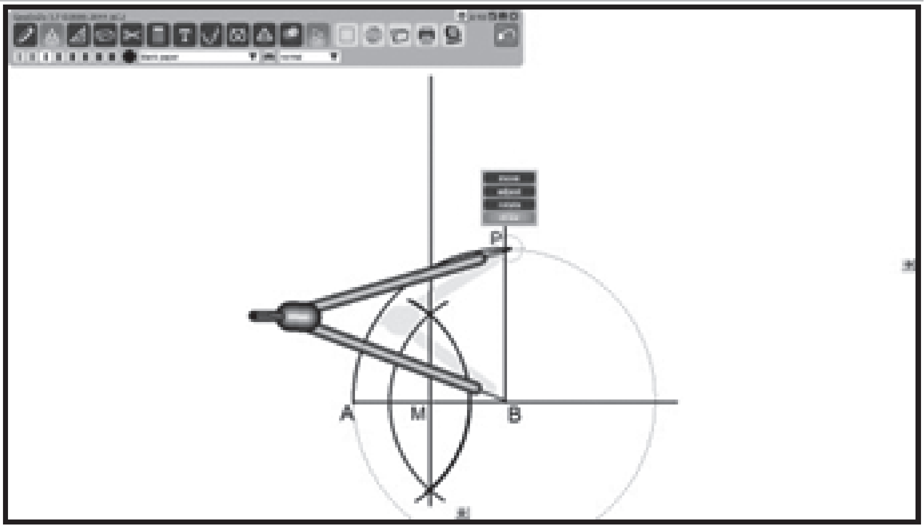
**Figura 10**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Com isso, faço uma reta perpendicular a AB a partir de B e prolongue a reta AB em B. Abro o compasso em B até A e traço um arco começando em A até a intersecção da perpendicular em B, será ali o ponto P.

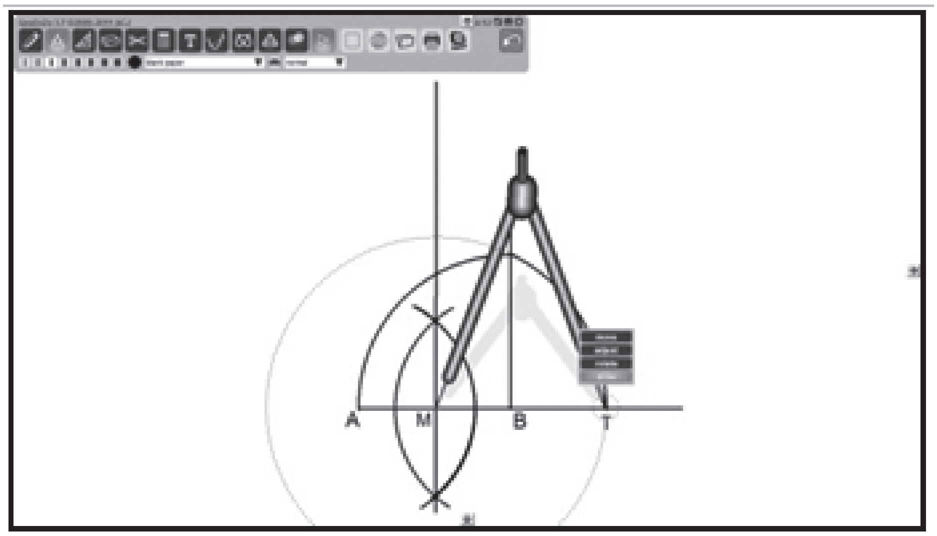
**Figura 11**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Apoiando o compasso no ponto M, abro até a intersecção P e, a partir daí, faz-se um arco até encostar no prolongamento do lado B, teremos o ponto T.

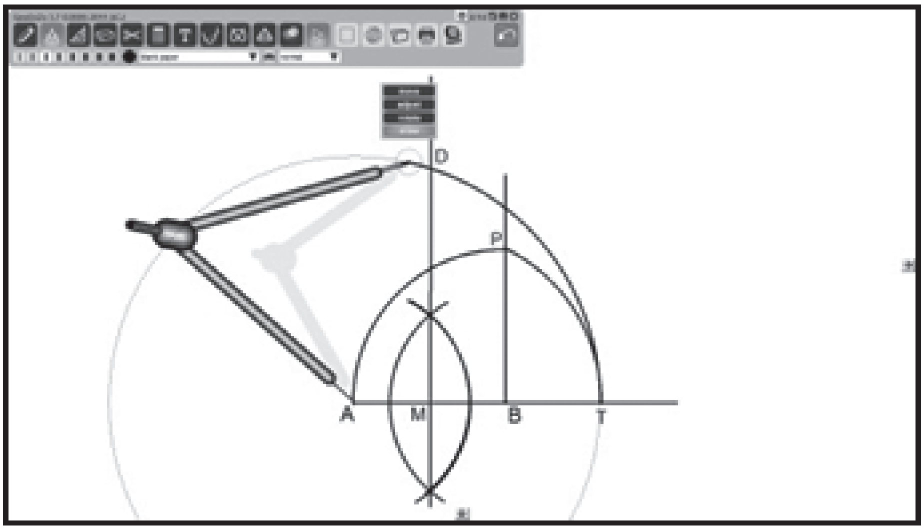
**Figura 12**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Com o compasso em A até T, apoiado em A, trace um arco até encostar na reta da mediatriz de AB, tem-se o ponto D.

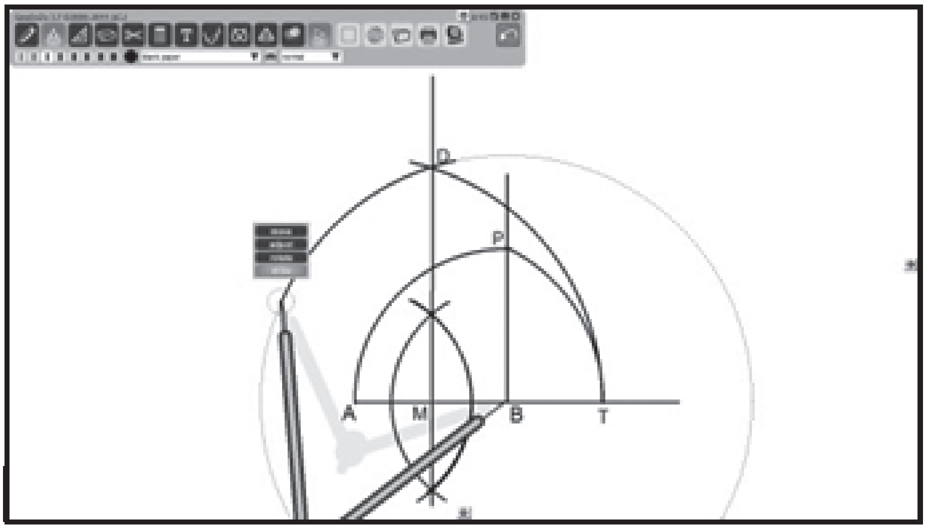
**Figura 13**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Com a mesma abertura do compasso, apoio no ponto B e traço o arco com intersecção no ponto D.

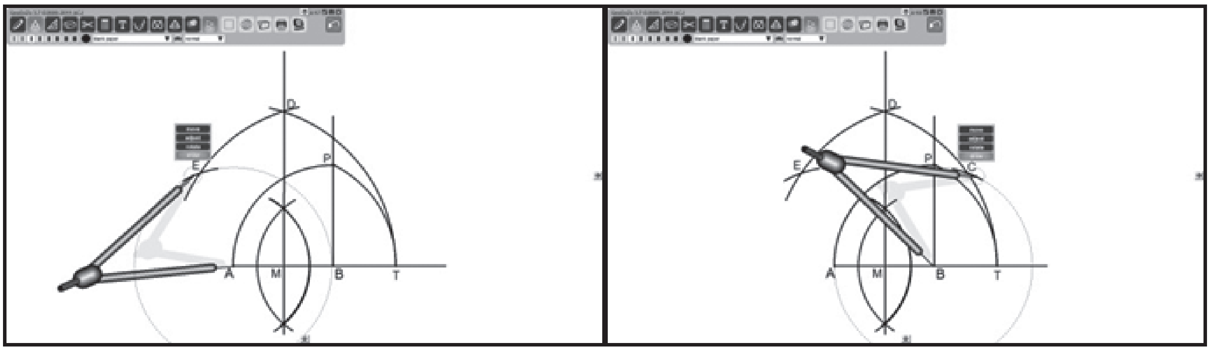
**Figura 14**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Abro o compasso em 5,8 centímetros, apoiado em A traço o ponto E e apoiado em B traço o ponto C.

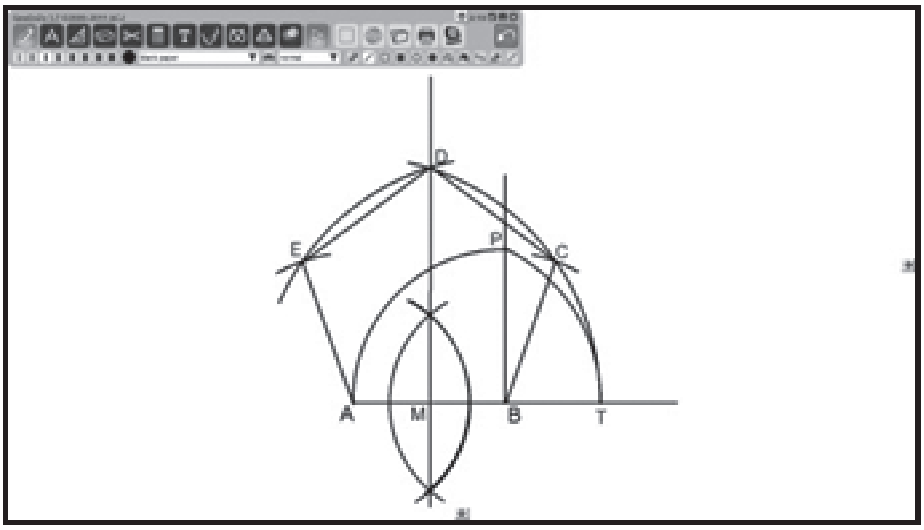
**Figura 15**. Desenho no Geoenzo Pentágono




Fonte: Os autores

Basta ligar os pontos B em C, C em D, D em E e E em A, tem-se então um pentágono regular, conforme a figura mostra.

**Figura 16**. Desenho no Geoenzo Pentágono



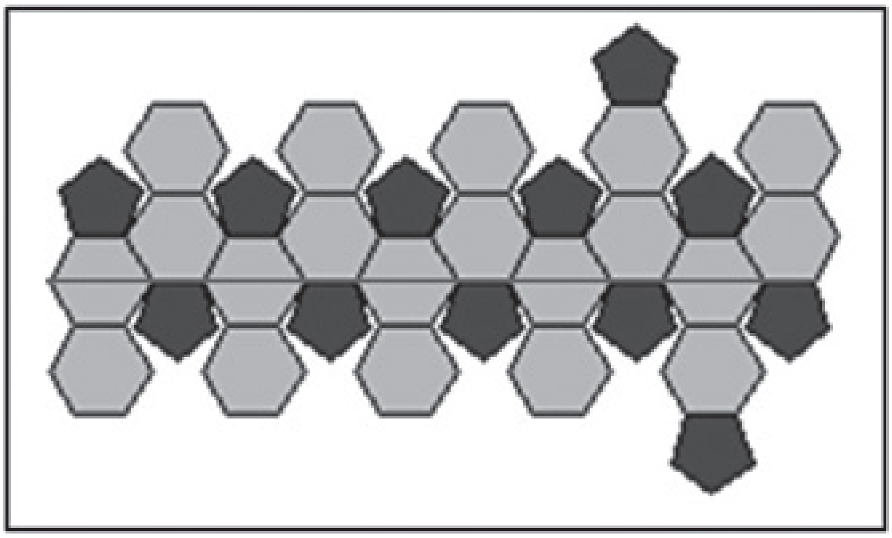

Fonte: Os autores

## Outras considerações sobre o problema

Concluídos os cálculos e confeccionados os moldes para a fabricação de todos os gomos da bola, ficaram alguns questionamentos que serão analisados a seguir. A partir deles, foram feitas outras observações a respeito de como chegar à medida do lado dos pentágonos e hexágonos.

Uma das imagens que mostra a planificação da estrutura da bola de futebol proporcionou uma visão reveladora. Observe a planificação na figura que segue.

**Figura 17**. A estrutura poliédrica da bola de futebol

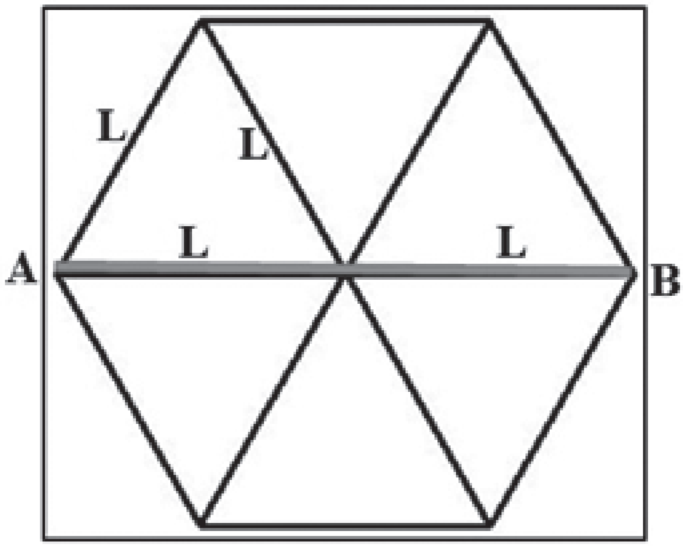


Fonte: Albino (2011, p. 41)

Após olhar com atenção especificamente onde está a reta horizontal que corta a figura quase ao meio, é possível notar que a distância da ponta do primeiro hexágono (à esquerda), o corta ao meio e passa posteriormente pela junção de um pentágono e um hexágono e assim sucessivamente, criando uma reta imaginária. Esta reta, quando ligada aos dois vértices, forma o perímetro da circunferência.

O hexágono demonstrado a seguir serve como referência para o entendimento do que está acontecendo com a reta imaginária da figura anterior. Formado por seis triângulos retângulos é fácil observar que a distância de um vértice A até o seu oposto B equivale a duas vezes o seu próprio lado.

**Figura 18**. Hexágono




Fonte: Os autores

Note que a reta imaginária corta cinco vezes a distância de A até B por todo o seu trajeto na planificação da bola, ou seja, dez lados do polígono e cinco junções entre pentágonos e hexágonos que nos dá cinco lados do polígono. Então, o perímetro da esfera nada mais é que 15 lados dos polígonos que os constituem. O perímetro da esfera é:

$$P = D \cdot \pi$$

$$P = 28 \cdot 3{,}14$$

$$P = 87{,}96\ cm$$

Basta então dividir o perímetro por 15 para saber qual o tamanho que terão os lados dos hexágonos e pentágonos.

$$l = \frac{P}{15}$$

$$l = \frac{87{,}96}{15}$$

$$l \cong 5{,}86\ cm$$

A resposta a que chego é muito parecida com a calculada no primeiro caso. Comparando os casos, é por décimos de milímetros que a resposta não é a mesma. Com essa nova ideia, fica fácil definir uma fórmula para calcular o lado do pentágono ou hexágono para a construção da bola, basta dividir por 15 o perímetro da esfera que se deseja formar e você terá a medida dos lados.

**O bolo**

Na confeitaria, a professora não teve nenhum problema em preencher a bola. Com todos os cálculos prontos, comprovados matematicamente e feitos os moldes de papel e entregues a ela, tem-se abaixo a foto tirada do bolo quase pronto e já preenchido.

**Figura 19**. Bolo pronto

Fonte: Os autores

O bolo foi preenchido com pasta americana moldada nas cores preto e branco para se assemelhar com a bola. Com a última consideração feita, em que bastava dividir o diâmetro maior da esfera por 15 para saber qual o tamanho do lado dos polígonos, a professora aplicou com seus alunos tornando o resultado positivo.

**Considerações finais**

Para o problema proposto, a solução se dá de maneira equacional. Trabalhar com a sintetização de uma equação requer um desenvolvimento aritmético e algébrico junto com o raciocínio lógico. Este raciocínio está ligado a conhecimentos preestabelecidos adquiridos no decorrer de seu aprendizado no ensino.

Além de resolver por equação, o problema é resolvido em um segundo momento por visualização geométrica. Esta só é possível graças a conhecimentos matemáticos já adquiridos, em que notamos que bastava dividir por 15 o diâmetro maior da esfera e teremos o tamanho do lado dos polígonos que a constitui.

A matemática está contida em várias situações da nossa vida e há a possibilidade de contextualizar sempre para que o ensino se torne algo prazeroso e interessante para o aluno, trabalhando sempre de maneira lúdica, mas sempre objetiva.

Como se constatou em todos os trabalhos utilizados para a construção deste artigo, é evidente a carência de se achar informações nos livros brasileiros tratando dos poliedros arquimedianos. Na maioria dos casos, os livros que foram pesquisados traziam apenas alguns fatos, sem se aprofundar no contexto. Um fato importante é que nem sempre foi assim no Brasil, por volta de 1900 a 1960, o assunto em questão aparecia em livros de desenho geométrico. A possível exclusão pode se dar à complexidade do conteúdo.

**Referências**

ALBINO, Telma Cristina de Souza. **Poliedros**. 2011. Monografia (Pós-graduação em Matemática) - Departamento de Matemática da UFMG, Belo Horizonte, 2011.

ALMEIDA, Talita Carvalho Silva de. **Sólidos Arquimedianos e Cabri 3d**: um estudo de truncaturas baseadas no Renascimento. 2010. Trabalho Acadêmico (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC/SC, São Paulo, 2010.

BRASIL. Programa de Gestão Escolar (GESTAR). **Caderno de teoria e prática 3**. Brasília: Ministério de Educação Fundescola, 2008.

ENEM. Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais Poliedros Arquimedianos**: Materiais Manipuláveis e o Software Poly Como Alternativa Didática. Curitiba: SBEM, 2013.

Artigo recebido em 15/06/16. Aceito em 18/08/16.