

MATRIZES: operações básicas, aplicações e metodologias de ensino

Headquarters: basic operations, applications and teaching methods

Andréa Hahnebach Kurth¹

Josileine Salewski¹

Hiandra Barbara Götzinger Montibeller¹

Resumo: Em um livro escrito na China por volta de 100 anos a.C. são encontrados os primeiros relatos sobre o estudo de matrizes. Acredita-se que esse estudo se iniciou pela necessidade de resolução de sistemas de primeiro grau. As matrizes podem ser definidas como tabelas de elementos, que podem ser números, funções etc. São três as operações básicas que podem ser realizadas com matrizes: adição, subtração e multiplicação. A multiplicação pode ocorrer de duas maneiras: multiplicando-se um número por uma matriz ou multiplicando-se a matriz por outra matriz. As matrizes são utilizadas em diversas áreas, como ciências, engenharia, economia, física, biologia, entre outras. A metodologia da resolução de problemas e a metodologia de modelagem matemática são exemplos de metodologias que podem ser utilizadas para o ensino de matrizes.

Palavras-chave: Matrizes. Aplicação. Metodologia.

Abstract: In a book from China, which was written about 100 years B.C., the first reports about the studies of matrices can be found. One would imagine that these studies began due to the need of the resolution of first grades equations. Matrices can be defined as charts of elements; that can be numbers, functions etcetera. There are three basic arithmetical operations that can be resolved by the use of matrices: addition, subtraction and multiplication. Multiplication can happen in two ways: either a number is multiplied by the matrix or a matrix is multiplied by another matrix. Matrices can be applied in many different fields such as science, engineering, economy, physics, biology and others. The methodology of resolving mathematical problems by the use of matrices and the methodology of mathematical modeling can be used as examples for teaching matrices.

Keywords: Matrices. Application. Methodology.

Introdução

As matrizes são tabelas formadas por elementos dispostos em linhas e colunas, utilizadas para a realização de cálculos em diversas áreas de estudo.

O estudo apresentado trata de matrizes, buscando compreender um pouco de sua história e sua definição. Tem como objetivo aprimorar os estudos sobre o conceito de matrizes, compreender o desenvolvimento das operações básicas com matrizes e estudar metodologias de ensino relacionadas às matrizes.

Para a realização deste estudo, será utilizada a prática de pesquisa documental. Essa metodologia consiste na realização de pesquisa documental apresentando como principal objetivo a análise e interpretação de dados.

Matrizes: história e definição

Pode-se dizer que a história das matrizes se inicia por volta do ano 100 a.C., quando se escreveu um livro que traz os primeiros relatos sobre o estudo das matrizes.

De acordo com Manoel Paiva (2005, p. 299):

¹Centro Universitário Leonardo Da Vinci – UNIASSSELVI – Rodovia BR 470 - Km 71 - nº 1.040 – Bairro Benedito – Caixa Postal 191 – 89130-000 – Indaial/SC Fone (47) 3281-9000 – Fax (47) 3281-9090 – Site: www.uniasselvi.com.br

Aproximadamente no ano 100 a.C., foi escrito na China o livro *Chui-Chang Suan-Shu* (em português, *Os nove capítulos da arte matemática*), de autor desconhecido. Essa obra trata de 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, impostos, equações etc. Um dos problemas apresenta o seguinte sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Nesse livro, o sistema é resolvido por meio de operações efetuadas com os elementos da seguinte tabela:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Atualmente, essa tabela é chamada de **matriz**. Esse é um dos registros mais antigos sobre matrizes, o que nos leva a crer que o estudo das matrizes teve como motivação inicial a necessidade de resolver sistemas de 1º grau.

Observa-se que foi apresentada no livro uma tabela que hoje é conhecida como matriz. Esse registro encontrado é um dos mais antigos sobre o tema e observa-se que surgiu pela necessidade de resolução de sistemas de 1º grau.

As matrizes são tabelas de elementos, que podem ser números, polinômios, funções etc., dispostos em linhas e colunas. Essa tabela deve ser apresentada entre parênteses, entre colchetes ou entre barras duplas. Para Bonjorno, Giovanni e Giovanni Júnior. (2002, p. 169): “As matrizes são tabelas de números reais utilizadas em quase todos os ramos da ciência e da engenharia”. Assim sendo, percebe-se que as áreas que mais utilizam as matrizes são a ciência e a engenharia.

Elementos de uma matriz

Os elementos que compõem uma matriz são os números, funções etc., que estão dispostos em linhas e colunas. Para representação de uma matriz, são utilizadas letras maiúsculas do alfabeto, enquanto que para representação dos seus elementos, utilizam-se as letras minúsculas. Como afirmam Bonjorno, Giovanni e Giovanni Júnior. (2002, p. 170): “Utilizamos letras maiúsculas para indicar matrizes genéricas e letras minúsculas correspondentes para os elementos”.

Isso significa que, tendo-se uma matriz representada pela letra A, seus elementos serão representados pela letra seguida dos índices i e j, que representam respectivamente a linha e a coluna em que se encontra o elemento dentro da matriz.

Ordem de uma matriz

A ordem de uma matriz é definida pelo número de linhas e colunas que a compõem. Steinbruch e Winterle, (1987, p. 370) afirmam que: “Se a matriz A é de ordem m por n, costuma-se escrever simplesmente $A_{(m,n)}$. Assim, se uma matriz A tiver 3 linhas e 4 colunas, escreve-se simplesmente $A_{(3,4)}$ e diz-se matriz de ordem 3 por 4”.

A observação da ordem de uma matriz, ou seja, seu número de linhas e colunas é importante para realização de operações entre matrizes.

Operações básicas com matrizes

As operações básicas que podem ser realizadas com matrizes são: adição, subtração e multiplicação.

Adição e subtração de matrizes

A adição e a subtração de duas matrizes só podem ser realizadas se elas forem matrizes do mesmo tipo. Como afirmam Bonjorno, Giovanni e Giovanni Júnior. (2002, p. 174): “A adição ou a subtração de duas matrizes, A e B, do mesmo tipo é efetuada somando-se ou subtraindo-se os seus elementos correspondentes”.

Sendo assim, constata-se que a adição e a subtração entre duas matrizes só será possível se elas forem do mesmo tipo, ou seja, forem da mesma ordem, apresentarem o mesmo número de linhas e colunas. A adição é realizada somando-se os elementos correspondentes das matrizes, e a subtração, por sua vez, é realizada subtraindo-se os elementos correspondentes das matrizes.

A matriz resultante, tanto na adição, quanto na subtração apresenta a mesma ordem das matrizes iniciais.

Multiplicação com matrizes

A multiplicação com matrizes pode acontecer de duas maneiras: a multiplicação de uma matriz por um número real e a multiplicação entre duas matrizes.

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

Para realizar a multiplicação de um número real por uma matriz, devem-se multiplicar todos os elementos da matriz pelo número real apresentado. Como apresentado por Bonjorno, Giovanni e Giovanni Júnior, (2002, p. 176): “Para multiplicar uma matriz por um número real basta multiplicar todos os seus elementos pelo número, e o resultado é uma matriz de mesma ordem”.

A multiplicação ocorre entre o número real e cada um dos elementos da matriz. A matriz resultante é da mesma ordem da matriz inicial.

Multiplicação entre matrizes

A multiplicação entre matrizes se torna possível apenas quando o número de colunas da 1ª matriz é igual ao número de linhas da 2ª matriz e realiza-se a operação multiplicando linha por coluna.

De acordo com Bonjorno, Giovanni e Giovanni Júnior, (2002, p. 178):

Observe que a operação de multiplicação é efetuada multiplicando-se linha por coluna, isto é, cada elemento de uma linha é multiplicado pelo elemento correspondente de uma coluna e, em seguida, os produtos são adicionados.
[...]. Na multiplicação de duas matrizes, A e B, o número de colunas de A deve ser

igual ao número de linhas de B; o produto AB terá o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

Exemplo:

Sendo as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, realizando-se a multiplicação $A \cdot B$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \\ 0 \cdot 7 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 0 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 14 + 9 & 4 + 12 & 10 + 18 \\ 0 + 6 & 0 + 8 & 0 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 16 & 28 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

Através do exemplo apresentado, pode-se verificar que a multiplicação apenas foi possível porque o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B. A matriz resultante possui o mesmo número de linhas de A e o mesmo número de colunas de B.

Aplicações das matrizes

As matrizes podem ser aplicadas em diversas áreas. Segundo Kuerten (2002, p. 27): “Matrizes são utilizadas em muitas áreas, como Economia, Física, Engenharia, Biologia, entre outras”. Percebe-se então que existe um amplo campo para a aplicação de matrizes.

Entre suas várias aplicações, podemos citar como exemplo a análise do crescimento populacional, como descreve Kuerten (2002, p. 32): “A Álgebra Matricial é um instrumento importante para análise do crescimento populacional. Uma dada população de indivíduos pode ser subdividida em grupos etários ou raças diferentes, e assim buscaremos determinar como a população se modifica ano a ano”.

Para determinar a modificação da população que ocorre ano a ano se recorre ao uso de matrizes.

As matrizes e as operações com elas realizadas também podem ser utilizadas para cálculos de produção, de notas, de valores de energia gastos. De acordo com Oliveira (2012, p. 29): “Na produção de produtos como televisores e carros, no cálculo das notas dos alunos no final de um bimestre, no cálculo do valor calórico que uma pessoa gasta fazendo exercícios físicos e na produção de doces são situações em que encontramos o produto de matrizes”.

As matrizes também podem ser aplicadas para controle do tratamento com insulina realizado pelos diabéticos. Campos (2008, p. 12) relata: “Para o tratamento dos diabéticos, são utilizadas, entre outros remédios, as insulinas que se apresentam em várias concentrações e tipos. Com os dados das insulinas que um paciente deva fazer seu tratamento, podemos montar matrizes para o controle do consumo de cada uma”.

Assim sendo, percebe-se que as matrizes possuem um número muito grande de aplicações, essas aplicações acontecem em diferentes áreas, podendo ser aplicações simples ou complexas.

Matrizes e metodologias de ensino

Um das metodologias aplicadas para o ensino de matrizes é a metodologia da resolução de problemas. Segundo Siqueira Filho (2013, p. 6):

O problema é olhado como um elemento que pode disparar o processo de construção do conhecimento. Os professores, através da resolução de problemas, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. O ensino está centrado no aluno, que constrói os conhecimentos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor.

Tem-se então que através da resolução de problemas podem ser feitas correlações entre as diferentes áreas da matemática. Eles podem auxiliar no processo de construção do conhecimento. Com esse método, o ensino se centraliza no aluno que, resolvendo um problema, constrói conhecimentos matemáticos.

Segundo Polya (apud SIQUEIRA FILHO, 2013), a resolução de um problema matemático se divide em quatro etapas. Essas etapas são: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e realizar a verificação. Sendo assim, observa-se que a resolução de um problema não consiste apenas em descobrir o resultado final do problema proposto, é muito mais do que isto. Envolve compreensão, elaboração de plano, execução do plano elaborado e posteriormente a verificação, que permitirá observar quais os resultados gerados pelo plano anteriormente elaborado.

Siqueira Filho (2013, p. 19) traz o seguinte exemplo de aplicação do método da resolução de problemas no ensino de matrizes:

Uma indústria de automóveis produz carros X e Y nas versões popular, luxo e superluxo. Na montagem desses carros são utilizadas as peças A, B e C. Para certo plano de montagem são fornecidas as seguintes tabelas:

Tabela I

	Carro X	Carro Y
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

Tabela II

	Popular	Luxo	Superluxo
Carro X	2	4	3
Carro Y	3	2	5

Para o planejamento da composição de peças por tipo de carro que matriz deve ser usada? Ou ainda, quantas peças do tipo B serão usadas para montagem de um carro superluxo, por exemplo?

A partir do exemplo apresentado, verifica-se uma proposta de aplicação do método de resolução de problemas para o estudo de matrizes. São trazidos dois questionamentos, dos muitos que podem ser realizados para o problema. Como resposta aos questionamentos apresentados, Siqueira Filho (2013) demonstra a resolução através do método de resolução de problemas.

Segundo ele, a primeira etapa seria a compreensão do problema. Nessa etapa, busca-se descobrir qual é a incógnita, lembrando que o que se quer saber é se existe alguma matriz com informações que relacionam o número de peças por tipo de carro. Também se busca determinar

qual é a condicionante. Siqueira Filho (2013) aborda que a condição do problema são as quantidades de peças específicas para cada um dos modelos de carro e suas respectivas versões. Outro questionamento que surge na compreensão do problema é se a condicionante é suficiente para determinação da incógnita.

A segunda etapa é o estabelecimento de um plano. Nesta etapa, deve ser analisado se o problema já foi visto antes, se existe algum problema conhecido que pode ser útil na resolução deste, se é possível resolver o problema com os dados fornecidos.

De acordo com Siqueira Filho (2013, p. 20):

Ora, percebam que a relação entre o número de peças por tipo de carro pode ser obtida multiplicando, ordenadamente, as linhas da tabela que informam o número de peças pelas colunas da tabela que informam a versão do carro, em seguida, obtendo a soma. Assim, cada elemento resultante indicará a quantidade de peças do tipo A, B ou C que será necessária para a montagem do carro X ou Y e a respectiva versão popular, luxo e superluxo. Veja, portanto, que o plano pode ser usarmos multiplicação de matrizes.

A terceira etapa é a execução do plano, no qual deve ser realizado o que foi proposto no estabelecimento do plano, no caso, multiplicação de matrizes. Realizando a multiplicação da matriz de peças pela matriz dos tipos de carros, chega-se à conclusão de que a quantidade de peças do tipo A usadas para montagem dos carros de luxo será 22. A quantidade de peças do tipo B utilizadas para a montagem de um carro superluxo será 34.

A quarta e última etapa da resolução do problema é o retrospecto, onde se buscam verificar respostas para outros questionamentos, como: Quantas peças do tipo C são necessárias para montagem de um carro versão luxo, e quantas são necessárias para versão popular, se é possível verificar o resultado, se pode-se chegar ao resultado através de outro caminho e que outras variações poderiam ser feitas através desse problema.

Observa-se que a resolução do problema consiste na utilização das quatro etapas propostas por Polya (apud SIQUEIRA FILHO, 2013). Nessas etapas são feitos questionamentos que levam a uma melhor compreensão do problema. Após o problema ser compreendido, elabora-se então o plano de execução e em seguida executa-se o plano.

Outra metodologia que pode ser utilizada para o ensino de matrizes é a modelagem matemática. Conforme Ferreira e Panciera (2006, p. 2): “A Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino vem ao encontro da nova visão de Educação Matemática, que valoriza não apenas adquirir conhecimentos, mas o desenvolvimento de capacidades, atitudes e valores, relacionando a Matemática ao mundo real”.

Com isso, nota-se que a modelagem matemática é uma metodologia de ensino que traz aos alunos não apenas o conhecimento, mas também o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de valores e faz isso relacionando a matemática com o mundo real.

De acordo com Bassanezi (apud FERREIRA E PANCIERA, 2006, p. 2): “[...] o uso da modelagem conduz ao ensino de conteúdos matemáticos conectados com outras formas de conhecimento”. Assim sendo, o ensino dos conteúdos matemáticos pode ser abordado com outras formas de conhecimento, que podem despertar um maior interesse por parte dos alunos.

Ferreira e Panciera (2006) abordam o conteúdo de matrizes através de um programa que relaciona atividades físicas e a quantidade de calorias perdidas. Através dessa abordagem, além do estudo das matrizes, visa-se também a uma melhoria na qualidade de vida dos adolescentes, estimulando-se a prática de atividades físicas.

Eles apresentam um problema sobre um aluno que pesa 73 quilos e deseja perder peso através de um programa de dieta e de exercícios. Deseja-se descobrir quantas calorias ele vai

queimar por dia se seguir o programa. No problema são apresentadas as seguintes tabelas:

Tabela 1. Calorias queimadas por hora

Peso	Caminhar a 3Km/h	Correr a 9Km/h	Andar de bicicleta a 9Km/h	Jogar Futebol
69	213	651	304	420
73	225	688	321	441
77	237	726	338	468
81	249	764	356	492

Fonte: Ferreira e Panciera (2006, p. 3)

Tabela 2. Horas por dia para cada atividade

	Caminhar	Correr	Andar de bicicleta	Jogar futebol
Segunda-feira	1,0	0,0	1,0	0,0
Terça-feira	0,0	0,0	0,0	2,0
Quarta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0
Quinta-feira	0,0	0,0	0,5	2,0
Sexta-feira	0,4	0,5	0,0	0,0

Fonte: Ferreira e Panciera (2006, p. 4)

As informações das tabelas apresentadas são relacionadas, os dados que constam na segunda linha da Tabela 1 são relacionados aos dados constantes na Tabela 2. Será realizada a multiplicação dessas matrizes e com isso chegar-se-á ao resultado de calorias que Fernando vai queimar após cada dia de exercício.

Depois de realizada a multiplicação, constata-se que Fernando vai queimar 546 calorias na segunda-feira, 882 na terça, 434 na quarta, 1042,5 na quinta e 434 na sexta se seguir esse programa de dieta e de exercícios.

Através do problema apresentado, pode-se perceber que foi utilizado um tema presente no contexto dos alunos para aplicação de matrizes. Como visto, essa é a proposta da modelagem matemática, que trata assuntos da matemática com outras formas de conhecimento, que muitas vezes despertam maior interesse dos alunos do que a matemática pura.

Considerações finais

As matrizes são tabelas de elementos dispostos em linhas e colunas. Esses elementos podem ser números, funções, polinômios etc. A ordem de uma matriz é representada pelo seu número de linhas e colunas. Podem ser realizadas três operações básicas com matrizes: adição, subtração e multiplicação.

A adição e a subtração de matrizes só são possíveis em matrizes do mesmo tipo, ou seja, matrizes de mesma ordem. A multiplicação com matrizes pode acontecer de duas formas: multiplicação de uma matriz por um número e multiplicação entre duas matrizes. Esta segunda só é possível quando o número de linhas da primeira matriz é igual ao número de colunas da segunda matriz.

As matrizes possuem um amplo campo de aplicação. São utilizadas nas ciências, na engenharia, na economia etc. A análise do crescimento populacional e o controle do tratamento com insulina realizado pelos diabéticos são dois exemplos de aplicações das matrizes. Além

disso, elas também podem ser utilizadas para cálculos de notas de alunos, cálculos de produção etc.

Duas metodologias de ensino de matrizes que podem ser aplicadas são a metodologia da resolução de problemas e a metodologia da modelagem matemática.

Por meio da metodologia da resolução de problemas, os alunos buscam responder questionamentos para se chegar à resposta do problema. Eles analisam se já conhecem o problema, se já resolveram problemas parecidos e a partir daí elaboram planos de execução para resolução.

A metodologia da modelagem matemática, por sua vez, busca tratar os assuntos da matemática, no caso matrizes, com outros assuntos, mais familiares para os alunos, o que acaba despertando um maior interesse pelo que está sendo apresentado. Com essa metodologia, o aluno aprende matemática analisando assuntos do seu cotidiano.

Referências

BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **Matemática Completa**. São Paulo: FTD, 2002.

CAMPOS, Cristiani dos Santos. **Tratamento da diabetes: uma aplicação de matrizes**. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2008.

FERREIRA, Márcio Violante; PANCIERA, Leticia Menezes. A Modelagem Matemática no Ensino de Matrizes e Sistemas Lineares. In: **Anais da 12ª Jornada Nacional de Educação: Educação e Sociedade: Perspectivas Educacionais no Século XXI**. Santa Maria: Unifra, 2006. Disponível em: <<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSI-NO%20DE%20MATRIZES.pdf>>. Acesso em: 6 maio 2014.

KUERTEN, Cristini. **Algumas Aplicações de Matrizes**. 2002. 68 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

OLIVEIRA, Luana Margarida Ramos de. **O Produto de Matrizes e suas Aplicações**. 2012. 40 f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2012.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Volume Único**. São Paulo: Moderna, 2005.

SIQUEIRA FILHO, Aliprecídio José de. **Aplicações e Resoluções de Problemas como Metodologia para o Ensino de Matrizes, Sistemas Lineares e Determinantes**. 2013. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

Artigo recebido em 15/06/15. Aceito em 17/08/15.