MODELAGEM MATEMÁTICA COMO PROPOSTA PARA O ENSINO DE CÁLCULO NOS CURSOS DE ENGENHARIA

Modeling as proposed for mathematics teaching in engineering courses

Giovani Renato Zonta[1*]
Juliano Bona[2]

Resumo: O cálculo diferencial e integral é uma das ferramentas matemáticas mais presentes no ensino da engenharia. É amplamente utilizada na modelagem matemática de situação física e na solução de problemas práticos de engenharia. Uma das grandes dificuldades percebidas pelos docentes é a assimilação, por parte do acadêmico, de conceitos e técnicas do cálculo diferencial e sua aplicação em disciplinas específicas do Curso de Engenharia, em especial, no uso de técnicas para solução de equações diferencias ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs). Neste sentido, este artigo tem como objetivo reificar a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nas disciplinas relacionadas ao cálculo diferencial e integral nos cursos de Engenharia. Apresentamos também um exemplo de modelagem em um problema prático de engenharia, a determinação da viscosidade dinâmica de um fluido. Para a explanação é utilizado o método didático da aprendizagem baseado em problemas (ABP). Este procedimento requer a modelagem física da dinâmica do problema e a utilização de técnicas do cálculo adequadas para obter a solução. A proposta didática apresentada reforça a importância da modelagem matemática como estratégia didática para os conteúdos ligados ao cálculo diferencial e integral nos cursos de Engenharia.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Técnicas de Solução de Problemas.

Abstract: Differential and integral calculus is one of the most important mathematical topics in engineering learning. Its application is mainly in mathematical modelling of physical situations to solve practical engineering problems. One of the greatest students learning troubles, noticed by undergraduate professors, is the efective understanding of calculus concepts and methods and its applications in specific subjects in Engineering courses, specially, math techniques of solutions for ordinary differential equations (ODEs) and partial differential equations (PDEs). In this work, a solution method is presented for a practical Engineering problem, the determination of dynamic viscosity of a fluid. All issues development is based on a didactic method known as problem-based learning (PBL). This method requires a physical and mathematical modelling for the problem description and use of calculus techniques for appropriate problem analytical solution. This didactic method shows an important role model factor of issues learning integration for basic and specific modulus of the subjects in undergraduate Engineering courses.

Keywords: Mathematical Modelling. Differential and Integral Calculus. Solving-problem Techniques.

Introdução

Muitos problemas práticos de Engenharia requerem o conhecimento de técnicas matemáticas específicas para a obtenção de uma solução analítica. A disciplina de Mecânica dos Fluidos, uma das três áreas de estudo dos Fenômenos de Transporte (as outras duas áreas de estudo são a Transferência de Calor e a Transferência de Massa), contém muitas situações físicas que demandam o processo de modelagem matemática para solução do problema. Para tanto, antes de iniciar o curso desta disciplina, alguns pré-requisitos são fundamentais ao acadêmico, por exemplo, já ter cursado com êxito as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Física.

[1]Docente do curso de Engenharia de Produção do Núcleo de Ensino a Distância (NEAD) e dos cursos de Engenharia da Faculdade Regional Leonardo da Vinci (FAVINCI) e do Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI).
*Autor para contato: <giovani.zonta@uniasselvi.com.br>.
[2]Docente dos cursos de Engenharia da Faculdade Regional Leonardo da Vinci (FAVINCI) e do Centro Universitário Leonardo da Vinci (UNIASSELVI).

A principal dificuldade constatada pelos docentes ao longo do curso da disciplina de Mecânica dos Fluidos é a dificuldade dos acadêmicos em aplicar conceitos matemáticos previamente estudados no ciclo básico da graduação. Estes conceitos são utilizados para modelar matematicamente a situação física do problema e, com uso de técnicas adequadas, obter uma solução analítica para o modelo proposto, o que significa, obter a solução do problema. Outra problemática frequentemente exposta, neste caso, nas disciplinas fundamentais de Cálculo Diferencial e Integral, é a aparente abstratividade dos exemplos propostos e dos exercícios efetuados (MAYER, 2013). O acadêmico tem certa dificuldade em compreender e testificar a aplicabilidade destes tópicos de estudo.

As disciplinas específicas de Engenharia ajudam a solucionar esta problemática, em especial a utilização de uma metodologia de ensino-aprendizagem baseada em problemas e na filosofia da aprendizagem com foco na prática. Este conceito, conhecido como Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), é utilizado desde meados do século XX nos cursos de graduação em Engenharia de universidades norte-americanas (BROCKMAN, 2010). Seus conceitos foram desenvolvidos durante o período da Segunda Guerra Mundial, quando os países aliados necessitavam encontrar soluções rápidas e eficientes, com um mínimo de recursos, para diversas questões que envolveram o esforço de guerra (logística, materiais, construções de equipamentos e uso racional de insumos). Na década de 1960 e 1970, estes conceitos originaram um método de aplicação que se difundiu nas escolas de Medicina do Canadá e da Holanda. (MAYER, 2013). No Brasil, este modelo de aprendizagem tornou-se naturalmente comum nos cursos de Engenharia devido ao fato da utilização predominante de bibliografia estrangeira até os anos 1990, fato que, constatada sua eficácia, condicionou a maioria dos professores a adotarem a abordagem baseada em problemas para ensino de suas disciplinas nos cursos de Engenharia. Atualmente, a técnica de ABP tem sido aplicada em outras áreas do conhecimento (HOLTZAPPLE; REECE, 2006).

As didáticas baseadas em problemas são estratégias muito utilizadas em construções de modelos que têm como principal objetivo compreender o real no que se refere aos fenômenos físicos. Além disso, inverte o sentido do ensino tradicional de cálculo onde primeiro se definem os conceitos e depois são analisados os problemas práticos. A modelagem tem como pretensão didática construir os conceitos no próprio ato de resolver problemas práticos, ou seja, na própria construção dos modelos.

Desta forma, este artigo tem como objetivo reificar a modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nas disciplinas relacionadas ao cálculo diferencial e integral nos cursos de Engenharia. Para isso, vamos analisar a modelagem matemática, relacionada à resolução de problemas, como estratégia pedagógica para as disciplinas relacionadas ao cálculo diferencial e integral nos cursos de Engenharia. Logo em seguida, apresentaremos um exemplo de modelagem para sintetizar esta proposta didática.

Fundamentação teórica

O distanciamento entre teoria e prática parece ser uma constante na história das didáticas que envolvem o ensino da matemática. Depois do século XVIII, com o movimento iluminista, que tem como principal representante Descartes, a matemática assume um caráter teórico muito forte com a ideologia de se buscar a verdade através de um conjunto de teoremas e axiomas. O ideal platônico se projeta no cartesianismo e isola a matemática das situações do real, esta é a mais-valia intelectual desse momento histórico.

Depois do apogeu cartesiano vários movimentos foram se desenvolvendo em uma vertente chamada de matemática moderna. Newton, Leibniz e Lagrange, são alguns dos matemáticos que participaram desse movimento do cálculo infinitesimal, conhecido hoje como cálculo diferencial e integral. Porém, segundo Berti (2011), o desenvolvimento da matemática, nesta época, ainda deixava evidente a valorização da matemática teórica e a desvalorização das práticas que vieram a influenciar todo o futuro do ensino das disciplinas relacionadas à matemática.

Esse distanciamento da matemática relacionado a situações práticas provocou vários efeitos no desempenho dos alunos em sala. Podemos citar, a falta de interesse com relação às disciplinas relacionadas às exatas, alta evasão escolar, desvalorização social de forma mais ampla provocando o surgimento de discurso do tipo: a matemática não serve para nada. Todo este processo sintetiza e projeta no espaço escolar o ideal cartesiano de busca pela verdade no século XVIII e que não cabe mais dentro de nosso tempo histórico em que nossa sociedade é pautada sobre o pragmatismo e a rápida evolução tecnológica.

Identificando a rápida desvalorização simbólica que as disciplinas relacionadas à matemática vêm sofrendo nas últimas décadas, vários estudiosos reificam métodos didáticos que se comprometem a andar na contramão desse processo. Entre estes movimentos destacamos a modelagem matemática. Modelagem matemática é, segundo Ferruzzi (2004, p. 11), "um conjunto de regras e procedimentos que guiam o modelador na obtenção de um modelo matemático que representa um modelo extramatemático, utilizando-se de técnicas matemáticas e conhecimento criativo".

A modelagem se propõe a partir de situações do real para construir modelos que permitam entender melhor o fenômeno trazendo privilégios para a análise do comportamento futuro do mesmo. Para Bassanezi (2002, p. 15) a "arte do transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Novamente podemos observar a ênfase colocada sobre o real, ou seja, o processo matemático parte de fenômenos que inspiram problemas relacionados às diferentes áreas da ciência como a Física, Química, as engenharias, entre outras.

O que podemos perceber é que a modelagem inspira a resolução de problemas relacionados a situações reais. Vale destacar que a origem da matemática acontece no Egito no controle da subida e descida das águas do Rio Nilo, ajudando a agricultura. Neste sentido, a modelagem retorna aos princípios iniciais da matemática, que era entender melhor os fenômenos do cotidiano articulados às situações do ambiente onde as pessoas viviam. Os primeiros matemáticos eram construtores de modelos relacionados a problemas de sua época. A modelagem matemática de hoje, como não poderia deixar de ser, tem como pretensão resolver os problemas de nossa contemporaneidade. A única e principal diferença é que somos herdeiros de uma cultura matemática de conceitos e linguagens desenvolvidos principalmente na Europa pós século XVIII, que nos permitem construir modelos analíticos de maior sofisticação, como apresentaremos a seguir.

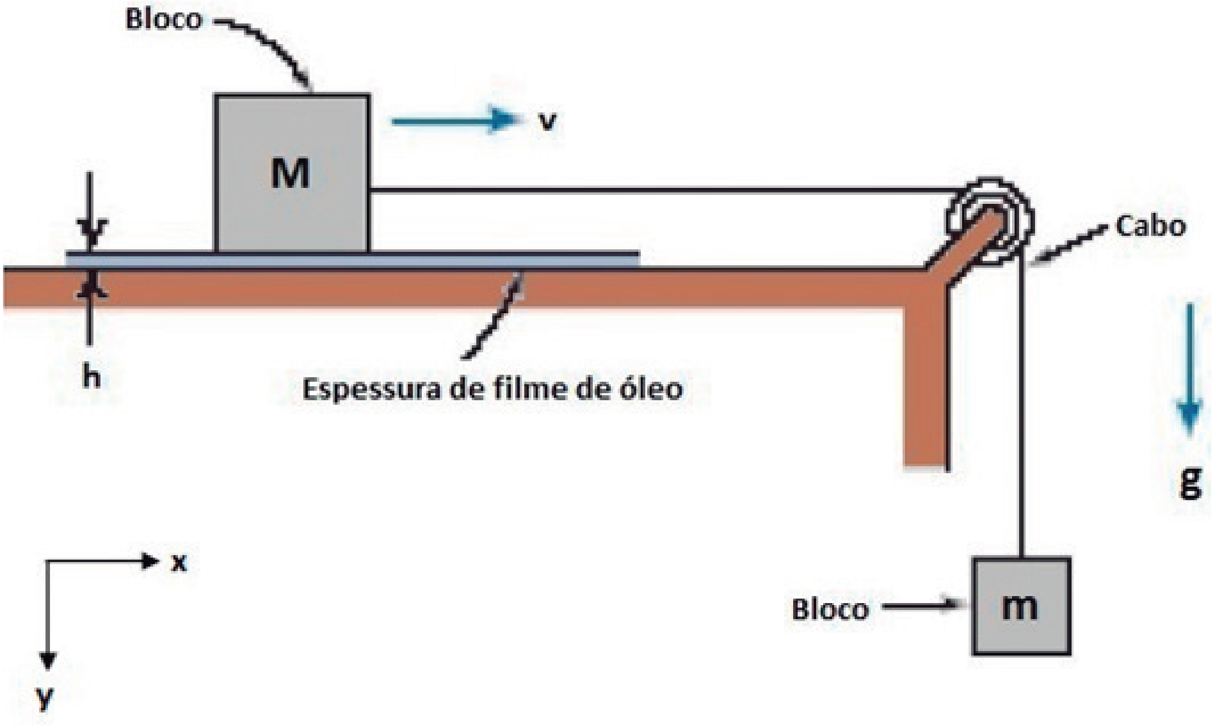
Transportando todas estas ideias para uma dimensão de prática didática no espaço acadêmico temos várias vantagens. Dentre elas, a principal é a reconexão da matemática a situações do real. Este aspecto traz um ganho na formação acadêmica, a matemática passa a ser novamente uma ferramenta de análise das situações reais. Há também uma inversão na construção dos conhecimentos matemáticos que de forma tradicional caminha na dinâmica de apresentação dos conceitos, listas de exercícios e posteriormente, quando é feito, análise de problemas reais. A modelagem matemática relacionada à resolução de problemas faz o inverso. Parte de problemas do real, constrói o modelo e a edificação dos conceitos matemáticos se dá na resolução do mesmo. O método didático é invertido em uma dimensão mais profunda e atrativa.

Destacamos alguns aspectos relacionados à modelagem matemática na resolução de problemas. Na sequência do texto vamos mostrar um exemplo de como este processo pode ser feito. Vamos utilizar um exemplo físico da disciplina de Mecânica dos Fluidos baseado em princípios newtonianos. O caso a seguir sintetiza o espírito dessa corrente teórica que, em última análise, faz renascer o sentido da matemática dos primeiros intelectuais dessa área. Vamos retomar este espírito, com uma pequena diferença dos primeiros matemáticos, ou seja, partimos do conceito e linguagem que herdamos dos muitos pensadores que, de certa forma, se fazem presentes na construção dos modelos atuais e, porque não dizer, no ato de escrever este artigo.

Estudo de caso: apresentação do problema

Neste estudo de caso, será apresentada a resolução de um exercício de fixação de conceitos preliminares da disciplina de Mecânica dos Fluidos, que envolve a determinação da viscosidade dinâmica de um fluido, enfatizando a modelagem matemática utilizada para obter sua solução (questões 1 a 7). O exemplo proposto foi adaptado de Fox, Mcdonald e Pritchard (2014, p. 51). Neste exemplo prático, pede-se para calcular a viscosidade dinâmica de um determinado óleo sobre um plano, sobre o qual um corpo de massa *M* desliza, sendo puxado por outro corpo suspenso de massa *m*. Quando este é liberado, tensiona o cabo e faz o bloco de massa *M* acelerar e deslizar sobre a película de óleo até atingir uma velocidade máxima e constante. Ambos os corpos estão conectados por um cabo que passa por uma polia. O atrito na polia e a resistência do ar podem ser desprezados (Figura 1).

Figura 1. Esquema físico para o estudo de caso



Fonte: Adaptado de Fox, Mcdonald e Pritchard (2014)

Com base neste esquema físico, devemos solucionar o problema atendendo às seguintes questões:

1) Desenvolver uma expressão algébrica que represente o balanço de forças atuantes no conjunto.

2) Encontrar uma equação diferencial que relacione a variação de velocidade (*dv*) do bloco de massa *M* em função de um intervalo de tempo (*dt*).
3) Resolver a equação diferencial e encontrar uma equação algébrica para calcular a velocidade do bloco de massa *M* em um instante de tempo.
4) Determinar a viscosidade dinâmica do óleo, considerando que o bloco de massa *M* leva 1 segundo para atingir a velocidade de 1m/s.
5) Deduzir uma expressão para calcular a velocidade máxima do bloco de massa *M*.
6) Calcular o tempo que o bloco de massa *M* leva para atingir a velocidade máxima.
7) Esboçar um gráfico *v= f (t)*, que ilustre a variação da velocidade do bloco de massa *M* no intervalo de tempo necessário para ele atingir a velocidade máxima.

O problema fornece os seguintes dados: $M=5kg$; $m=1kg$; $A_{molhada}=25cm^2$; $h=0,5mm$; $g=9,81m/s^2$.

Estudo de caso: modelagem matemática

A seguir é apresentada a solução do problema proposto, em etapas, seguindo as solicitações de cálculo da apresentação do problema. Cada subitem a seguir se refere à modelagem e ao desenvolvimento detalhado da solução de cada uma das questões. Neste momento, devemos apresentar as equações governantes e constitutivas que auxiliarão a modelagem matemática do problema. O problema envolve um exemplo de aplicação de uma força tangencial devido ao movimento de um corpo que causa deformação no fluido. Podemos relacionar a taxa de deformação no fluido (dv/dy) em função da tensão de cisalhamento aplicada (τ) com uma constante de proporcionalidade, que é a viscosidade dinâmica do fluido (μ).

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \cong \mu \frac{v}{h} \tag{1}$$

A equação (1) representa a Lei de Newton da viscosidade simplificada para um perfil linear de velocidade em um escoamento unidimensional incompressível em regime laminar para um fluido newtoniano. A tensão de cisalhamento (τ) sobre um fluido é a força tangencial ($F_{tangencial\ viscosa}$), que é aplicada sobre sua superfície, que é definida como área molhada de contato ($A_{molhada}$):

$$\tau = \frac{F_{tangencial\ viscosa}}{A_{molhada}} \tag{2}$$

A equação para o movimento de um corpo rígido é expressa pela segunda lei de Newton do movimento:

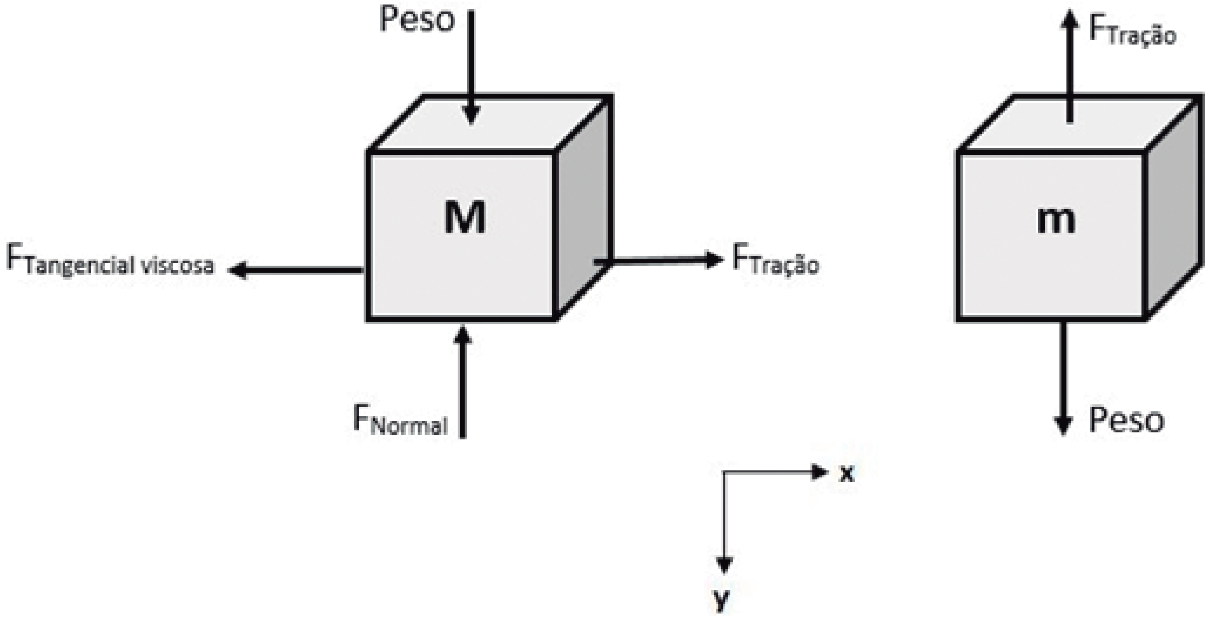
$$\sum F = ma \tag{3}$$

Com as equações (1), (2) e (3) definidas, iniciaremos o processo de modelagem matemática e resolução do problema.

Solução da Questão 1:

A primeira etapa da modelagem é identificar todas as forças atuantes sobre os dois blocos. Para isso, representamos o diagrama de corpo livre na Figura 2:

Figura 2. Diagrama de corpo livre do bloco de massa *M* e bloco de massa *m*



Fonte: Os autores

A partir da equação (3), o balanço de forças atuantes na direção *x* para o movimento do bloco de massa *M* é:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = ma_x \\ &F_{Tração} - F_{Tangencial\,viscosa} = Ma_x \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Da mesma forma, a partir da equação (3), o balanço de forças atuantes na direção *y* para o movimento do bloco de massa *m* é:

$$\begin{aligned} &\sum F_y = ma_y \\ &Peso - F_{Tração} = ma_y \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Somando as equações (3.1) e (3.2):

$$F_{Tração} - F_{Tangencial\,viscosa} = Ma_x$$

$$Peso - F_{Tração} = ma_y$$

$$Peso - F_{Tangencial\,viscosa} = (M+m)a \qquad (4)$$

A equação (4) representa uma expressão algébrica que relaciona as forças atuantes no movimento dos blocos.

Solução da Questão 2:

Substituindo as equações constitutivas (1) e (2) da Lei de Newton da viscosidade para uma escoamento laminar e perfil de velocidade linear na espessura de óleo em (4), e definindo a aceleração dos corpos como uma variação de velocidade (*dv*) em um intervalo de tempo (*dt*), temos:

$$Peso - \tau A_{molhada} = (M + m)\frac{dv}{dt}$$

$$Peso - \mu \frac{v}{h} A_{molhada} = (M + m)\frac{dv}{dt}$$

Isolando *dt*:

$$dt = \frac{(M + m)}{\left(Peso - \mu \frac{A}{h} v\right)} dv \qquad (5)$$

A equação (5) representa uma equação diferencial que relaciona a variação da velocidade do bloco de massa *M* em função de um intervalo de tempo.

Solução da Questão 3:

Nesta etapa, devemos resolver a equação diferencial deduzida no item anterior (equação 5), através de técnicas de integração. O procedimento é efetuado passo a passo a seguir com a equação diferencial na forma implícita. Substituiremos os valores conhecidos apenas nas etapas subsequentes.

Esta equação diferencial de 1ª ordem tem suas variáveis separáveis. Portanto, podemos iniciar o processo de integração definindo os limites de integração no intervalo de 0 a *t* para o tempo e de 0 a *v* para a velocidade:

$$\int_{t=0}^{t=t} dt = \int_{v=0}^{v=v} \frac{(M + m)}{\left(Peso - \mu \frac{A}{h} v\right)} dv \qquad (5.1)$$

A força Peso é vinculada ao bloco de massa *m*. Seu Peso tensiona o cabo conectado com o bloco de massa *M* e faz o sistema entrar em movimento. As massas *M* e *m* são constantes. Aplicando estas definições:

$$\int_{t=0}^{t=t} dt = (M + m)\int_{v=0}^{v=v} \frac{dv}{\left(mg - \mu \frac{A}{h} v\right)} \qquad (5.2)$$

A integral do segundo membro da equação diferencial é em relação à velocidade. A função a ser integrada aparenta ser uma função do tipo *du/u*, porém ela não está explícita de uma forma clara para resolução. Definiremos como função *u* todo o denominador da fração a ser integrada. Neste caso:

$$u = mg - \mu \frac{A}{h} v \tag{5.2.1}$$

Derivando esta equação em função de uma variação de velocidade (*du/dv*):

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\mu A}{h} \tag{5.2.2}$$

Com um rearranjo nesta equação, temos:

$$dv = \frac{du}{\left(-\frac{\mu A}{h}\right)} \tag{5.2.3}$$

Substituindo a equação (5.2.3) em (5.2), temos:

$$\int_{t=0}^{t=t} dt = (M + m) \int_{v=0}^{v=v} \frac{\frac{du}{\left(-\frac{\mu A}{h}\right)}}{\left(mg - \mu \frac{A}{h} v\right)} \tag{5.3}$$

Retirando as constantes da integral:

$$\int_{t=0}^{t=t} dt = \frac{(M + m)}{\left(-\frac{\mu A}{h}\right)} \int_{v=0}^{v=v} \frac{du}{\left(mg - \mu \frac{A}{h} v\right)}$$

Agora, temos especificados os valores da função *u* e de *du*. A integral de uma função *du/u* é igual ao *ln(u)*. Efetuando o processo de integração das funções:

$$t\Big|_{t=0}^{t=t} = \frac{(M + m)}{\left(-\frac{\mu A}{h}\right)} \left[\ln\left(mg - \frac{\mu A}{h} v\right)\Big|_{v=0}^{v=v} \right]$$

Aplicando os limites de integração nas funções integradas:

$$(t-0)=-\frac{(M+m)h}{\mu A}\left[\ln\left(mg-\frac{\mu A}{h}v\right)-\ln\left(mg-\frac{\mu A}{h}0\right)\right]$$

$$t=-\frac{(M+m)h}{\mu A}\left[\ln\left(mg-\frac{\mu A}{h}v\right)-\ln(mg)\right]$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos, onde *ln(x) – ln(y) = ln(x/y)* para simplificar a equação:

$$t=-\frac{(M+m)h}{\mu A}\ln\left(\frac{mg-\frac{\mu A}{h}v}{mg}\right)$$

$$t=-\frac{(M+m)h}{\mu A}\ln\left(1-\frac{\mu Av}{mgh}\right)$$

$$-\frac{\mu A}{(M+m)h}t=\ln\left(1-\frac{\mu Av}{mgh}\right)$$

Como precisamos escrever uma equação algébrica para calcular a velocidade do bloco de massa *M* em um dado instante de tempo, aplicamos o antilogaritmo (função exponencial) na equação para explicitar o termo de velocidade:

$$e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}=1-\frac{\mu Av}{mgh}$$

$$\frac{\mu Av}{mgh}=1-e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}$$

$$v=\frac{mgh}{\mu A}\left(1-e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}\right) \tag{6}$$

Com a equação (6), podemos calcular a velocidade do bloco de massa *M* em qualquer instante de tempo.

Solução da Questão 4:

Para determinar a viscosidade dinâmica do óleo, precisamos utilizar a equação (6) com dois dados importantes fornecidos pela questão: o Bloco de massa *M* leva 1 segundo para atingir a velocidade de 1m/s. Substituindo estes dados em conjunto com os dados já fornecidos para M, m, h, g e $A_{molhada}$ na equação (6):

$$v = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}\right)$$

$$1 = \frac{1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0005}{\mu \cdot 0{,}0025}\left(1 - e^{-\frac{\mu \cdot 0{,}0025}{(5+1) \cdot 0{,}0025} \cdot 1}\right)$$

$$\mu = 1{,}962 \cdot \left(1 - e^{-0{,}167\mu}\right) \qquad (6.1)$$

A equação (6.1) está com a viscosidade dinâmica implícita, o que demanda um processo iterativo para resolução. Com auxílio de uma planilha eletrônica ou calculadora gráfica para resolução da iteração numérica, usando o método de Newton-Raphson a partir de uma estimativa inicial para viscosidade dinâmica (1 Pa·s), obtemos a solução. O processo iterativo converge com erro (tolerância) igual ou menor que 10^{-2} após poucas iterações. Portanto, a viscosidade dinâmica (μ) do óleo é:

$$\mu = 1{,}2953\ Pa \cdot s$$

Solução da Questão 5:

Para deduzir uma expressão algébrica para cálculo da velocidade máxima do bloco de massa *M,* definimos que esta velocidade será alcançada em um instante de tempo suficientemente longo, ou $t \to \infty$, para o conjunto atingir o regime permanente de movimento. Substituindo na equação (6):

$$v = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}\right)$$

$$v_{máxima} = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}\infty}\right)$$

$$v_{máxima} = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\infty}\right)$$

$$v_{máxima} = \frac{mgh}{\mu A}(1 - 0)$$

$$v_{máxima} = \frac{mgh}{\mu A} \qquad (6.2)$$

Com a equação (6.2) é possível calcular a velocidade máxima atingida pelo bloco durante o deslizamento sobre a película de óleo. Substituindo os valores conhecidos:

$$v_{máxima} = \frac{1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0005}{1{,}2953 \cdot 0{,}0025} = 1{,}5146\ \frac{m}{s}$$

Solução da Questão 6:

Para calcular o tempo que o bloco de massa *M* leva para atingir a velocidade máxima, podemos fazer uso, novamente, da equação (6). Como já calculamos a velocidade máxima que o corpo atinge em seu movimento, adotando um tempo suficientemente longo para atingir o regime permanente e movimento uniforme, utilizamos este valor na equação (6.3) com o tempo explícito a ser determinado:

$$v = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}\right)$$

$$v_{máxima} = \frac{mgh}{\mu A}\left(1 - e^{-\frac{\mu A}{(M+m)h}t}\right) \tag{6.3}$$

$$1{,}5146 = \frac{1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0005}{1{,}2953 \cdot 0{,}0025}\left(1 - e^{-\frac{1{,}2953 \cdot 0{,}0025}{(5+1) \cdot 0{,}0005}t}\right)$$

$$1{,}5146 = 1{,}5147\left(1 - e^{-1{,}0794t}\right)$$

$$1{,}5146 - 1{,}5147 = -1{,}5147e^{-1{,}0794t}$$

$$0{,}000066 = e^{-1{,}0794t}$$

$$\ln(0{,}000066) = -1{,}0794t$$

$$t = \frac{-9{,}6258}{-1{,}0794} = 8{,}92s$$

Portanto, o bloco de massa *M* levará quase 9 segundos para atingir sua velocidade máxima e constante de deslizamento, em torno de 1,51 m/s, atingindo, assim, o regime permanente e uniforme de movimento.

Solução da Questão 7:

A variação da velocidade do bloco de massa *M* em função do tempo pode ser representada tabelando os valores calculados para velocidade de deslizamento em um determinado instante de tempo, com o uso da equação (6). Os dados estão ilustrados na Tabela 1. Foi calculada a velocidade de deslizamento para os primeiros 10 segundos após o conjunto iniciar o movimento, com a liberação do bloco de massa *m* (Figura 1).

Tabela 1. Velocidade de deslizamento (*v*) do bloco de massa *m* em um instante de tempo (*t*)

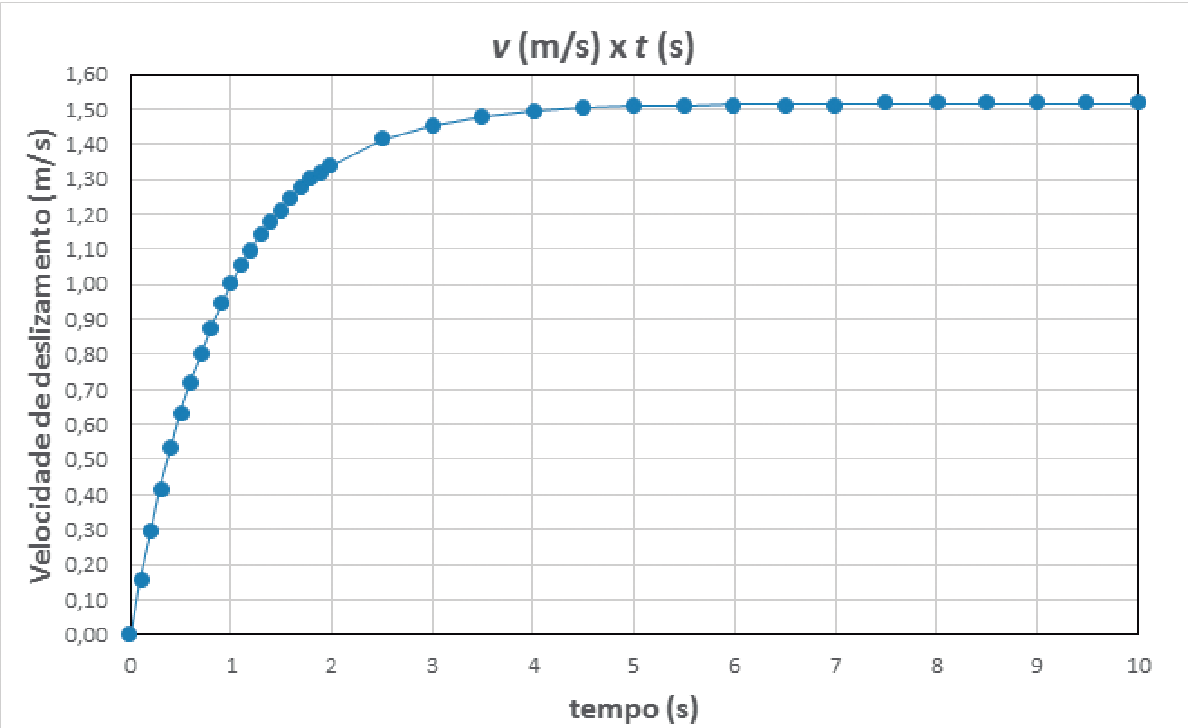
***t* (s)**	***v* (m/s)**	***t* (s)**	***v* (m/s)**
0	0,00000	1,9	1,31989
0,1	0,15498	2	1,33982
0,2	0,29411	2,5	1,41276
0,3	0,41900	3	1,45528
0,4	0,53112	3,5	1,48007
0,5	0,63176	4	1,49451
0,6	0,72210	4,5	1,50294
0,7	0,80320	5	1,50785

0,8	0,87600	5,5	1,51071
0,9	0,94135	6	1,51238
1,0	1,00002	6,5	1,51335
1,1	1,05268	7	1,51391
1,2	1,09996	7,5	1,51425
1,3	1,14239	8	1,51444
1,4	1,18049	8,5	1,51455
1,5	1,21469	9	1,51462
1,6	1,24538	9,5	1,51465
1,7	1,27294	10	1,51468
1,8	1,29768		

Fonte: Os autores

Os dados da Tabela 1 foram inseridos em um gráfico para ilustrar a variação da velocidade de deslizamento do bloco de massa *M* em função do tempo, apresentado na Figura 3:

Figura 3. Variação da velocidade (*v*) de deslizamento do bloco de massa *m* em função do tempo (*t*)



Fonte: Os autores

É possível constatar, pela análise do comportamento dos dados da Figura 3, que a velocidade de deslizamento do bloco de massa *M* segue uma função matemática com comportamento exponencial. O aumento da velocidade de deslizamento é brusco e rápido nos primeiros instantes após o início do movimento (até 1,5 segundos). Após 3,5 segundos do início do movimento, a velocidade de deslizamento praticamente atinge a velocidade constante, quando o movimento se torna uniforme (aceleração desprezível), ilustrado pela assíntota da curva que tende ao valor máximo. O valor máximo da velocidade de deslizamento é atingido após 7 segundos do início do movimento, com o valor máximo calculado no instante 8,92 segundos.

Através da modelagem matemática aplicada para resolução deste estudo de caso, evidenciamos que a viscosidade dinâmica do fluido exerce um papel importante na descrição do movimento do bloco de massa M. Com a determinação da viscosidade dinâmica do fluido, foi possível solucionar de forma detalhada o comportamento dinâmico do conjunto físico. As equações obtidas pela análise diferencial e integral contribuíram para a completa solução analítica do problema.

Considerações finais

Iniciamos pontuando algumas constatações feitas especificamente no que se refere à resolução do problema modelado. A modelagem matemática é um procedimento essencial e muito eficaz para a resolução de problemas práticos de engenharia e é importante que o acadêmico aprimore e desenvolva esta técnica ao longo das disciplinas cursadas na Engenharia.

O uso de técnicas adequadas de integração para resolver uma equação diferencial ordinária se faz necessário a fim de obter a solução analítica desejada. A familiaridade com o uso destas técnicas e outros recursos matemáticos deve ser desenvolvida na disciplina de Cálculo do Ciclo Básico da graduação em Engenharia. Esta prática, focada na metodologia da aprendizagem baseada em problemas, proporcionará ao acadêmico a experiência e fomentará sua técnica de solução de problemas.

A determinação de informações solicitadas, como propriedades do fluido e o comportamento de variáveis do problema em função do tempo podem ser avaliados através de equações diferenciais provenientes da modelagem matemática do sistema físico proposto. Estes resultados são mais didáticos e compreensíveis quando apresentados na forma de tabelas e gráficos, como os resultados apresentados no desenvolvimento do estudo de caso deste trabalho. O exemplo prático proposto ilustra apenas um caso simples de utilização das ferramentas do cálculo diferencial e integral para a solução de um problema físico na disciplina de Mecânica dos Fluidos. Outras técnicas do cálculo numérico empregadas para solução do problema poderiam ser discutidas com mais detalhamento, como por exemplo, o cálculo iterativo utilizado através do método de Newton-Raphson para solução da questão 4 do problema. Entretanto, esta discussão diverge do escopo da proposta deste artigo.

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar ao acadêmico um exemplo interdisciplinar na engenharia e a importância do conhecimento integrado das disciplinas do ciclo básico e do ciclo profissionalizante dos cursos de Engenharia. É inegável a importância de uma sólida formação nas disciplinas básicas do curso para permitir e garantir ao acadêmico a habilidade e destreza necessárias para executar na prática das disciplinas específicas. Como sugestão para futuros trabalhos, vários exemplos práticos de outras áreas do conhecimento podem ser desenvolvidos para evidenciar a importância das técnicas do cálculo diferencial e integral na Engenharia, como Resistência dos Materiais, Transmissão de Calor, Eletromagnetismo, entre outras.

Além dos aspectos relacionados aos conceitos do modelo apresentado, destacamos também, a inversão didática que o processo de modelagem pode proporcionar aos professores e suas práticas cotidianas. A modelagem na resolução de problemas proporciona um ganho intelectual aos acadêmicos e uma visão mais ampla do que é a ciência em relação à epistemologia, objetivando-se em situações de análise de problemas enfrentados no campo da engenharia.

Referências

BASSANEZI, R. C. **Ensino e aprendizagem como modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto 2002.

BERTI, N. M. **O ensino de matemática no Brasil**: buscando uma compreensão histórica. São Paulo, 2011.

BROCKMAN, J. B. **Introdução à engenharia**: modelagem e solução de problemas. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

FERRUZZI, E. C. et al. **Modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem nos cursos superiores de tecnologia**. São Paulo, 2004.

FOX, R. W.; McDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HOLTZAPPLE, M.; REECE, W. D. **Introdução à engenharia**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

MAYER, R. R. **How engineers learn**: a study of problem-based learning in the engineering classroom and implications for course design. Iowa State University. Ames, Iowa. Graduate Theses and Dissertations. Paper 13202. 2013.

Artigo recebido em 15/06/16. Aceito em 18/08/16.